

UM SISTEMA COMPUTACIONAL PARA A ANÁLISE DE
CASCAS DE REVOLUÇÃO COM IRREGULARIDADES LOCALIZADAS

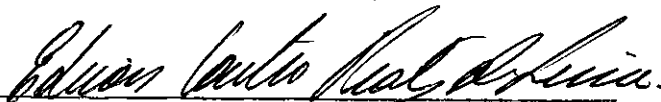
Breno Pinheiro Jacob

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO
RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

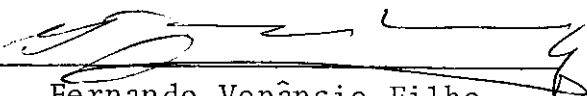
Aprovada por:



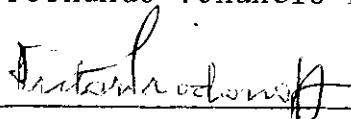
Nelson Francisco Favilla Ebecken
(Presidente)



Edison Castro Prates de Lima



Fernando Venâncio Filho



Victor Prodonhoff

RIO DE JANEIRO, RJ — BRASIL
DEZEMBRO DE 1983

JACOB, BRENO PINHEIRO

Um Sistema Computacional para a Análise de Cascas de Revolução com Irregularidades Localizadas (Rio de Janeiro) 1983.

ix , 179 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia Civil, 1983)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. COPPE.

1. Cascas 2. Sistema Computacional

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A

Benjamim e Maria Elisa, meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Nelson Francisco Favilla Ebecken, pela orientação e estímulo decisivos para a elaboração deste trabalho.

Aos colegas, professores e funcionários da COPPE, Programa de Engenharia Civil, em especial a Henriette La Rovere e aos companheiros das salas 116 e 118.

Aos amigos da RMCI, em especial ao Visconde Paulo Batista Gonçalves.

Ao Engenheiro Márcio E. Girão Barroso, por sua participação na escolha do tema deste trabalho.

À CNEN e ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido.

À Equipe do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ.

À Wilma Barros, Mariza V.C. Marote e Gilberto Luziê pela participação na confecção gráfica deste trabalho.

SINOPSE

Apresenta-se neste trabalho o desenvolvimento de um sistema computacional para a análise de estruturas pelo método dos elementos finitos.

Este sistema está dirigido para a análise de cascas, com especial atenção para cascas de revolução com irregularidades localizadas.

Estruturas deste tipo, também denominadas como "quasi-axissimétricas", têm sido analisadas através de modelos tridimensionais completos. Modelos axissimétricos também são empregados para estudos preliminares; no entanto, nenhum destes enfoques é capaz de reunir as vantagens de precisão nos resultados e economia computacional. Este trabalho apresenta o desenvolvimento de um terceiro enfoque, que consiste na utilização de um modelo "quasi-axissimétrico". Para representar a porção axissimétrica da estrutura, utilizam-se elementos de casca de revolução; para a região onde se encontram as irregularidades (furos, apêndices, etc...) utilizam-se elementos de casca tridimensional geral, e, para efetuar a transição entre as duas regiões, é empregado um elemento formulado especialmente para este propósito.

Os elementos utilizados são derivados da formulação isoparamétrica; apresenta-se o desenvolvimento para a obtenção das correspondentes matrizes de rigidez. Algumas considerações sobre o sistema computacional desenvolvido são também apresentadas, ressaltando-se as técnicas utilizadas para a montagem e resolução do sistema de equações, e a entrada de dados em forma de linguagem orientada. Finalmente, apresentam-se exemplos numéricos de utilização do sistema, para a verificação dos elementos implementados e do comportamento do modelo quasi-axissimétrico.

ABSTRACT

This work presents the development of a finite element computer program, which is presently intended for the analysis of shells, and particularly of shells of revolution with local irregularities.

In the analysis of these shells, the "classic" approach would be either to analyse the entire structure with 3-D shell elements, or else, for preliminar studies, to ignore the non-axisymmetric portions, thus obtaining an approximate solution with the use of shell-of-revolution elements. The development of a third approach is presented here, which utilizes the economical advantages of axisymmetry, while maintaining the accuracy for the non-axisymmetric portion: rotational shell elements are used in the axisymmetrical region of the shell, while 3-D shell elements are used in the regions where deviations (attachments, cut-outs) are found. The transition between these regions is accomplished by a "transitional element".

The finite elements used in the computer program are derived from isoparametric formulation. The development for the determination of their stiffness matrices is presented. Considerations about the computer program are also presented, including details of the techniques employed to assemble and solve the system of equations, and the facilities provided for the description of the structural model in terms of a problem-oriented language. Finally, numerical examples are shown, which verify the results presented by the implemented elements, and the behaviour of the "quasi-axisymmetric" model.

ÍNDICE

Pág.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.....	1
I.1 - Generalidades e Histórico.....	2
I.2 - Elementos Utilizados.....	4

CAPÍTULO II

ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO....	8
II.1 - Definição da Geometria.....	9
II.2 - Definição dos Deslocamentos.....	12
II.3 - Matriz de Rigidez.....	18

CAPÍTULO III

ELEMENTO DE TRANSIÇÃO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO.....	31
III.1 - Elemento de Casca Geral.....	32
III.2 - Elemento de Transição-A Linha Nodal.....	33
III.3 - Definição da Geometria.....	41
III.4 - Definição dos Deslocamentos.....	42
III.5 - Matriz de Rigidez.....	48

CAPÍTULO IV

MONTAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES.....	59
IV.1 - Generalidades.....	60
IV.2 - Estruturas Modeladas por Elementos Axissimétricos...	60
IV.3 - Estruturas Quasi-axissimétricas.....	62
IV.4 - Reordenação das Incógnitas Nodais.....	66
IV.5 - Armazenamento do Sistema de Equações.....	70
IV.6 - Resolução do Sistema de Equações.....	72

CAPÍTULO V

DESCRIÇÃO DO SISTEMA.....	74
V.1 - Generalidades.....	75
V.2 - Estrutura Geral da Programação.....	78
V.3 - Descrição das Subrotinas.....	84
V.4 - A Linguagem do Sistema Crilo.....	91
V.4.1 - Estruturação da Linguagem.....	91
V.4.2 - Descrição dos Comandos.....	94

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO SISTEMA.....	115
VI.1 - Introdução.....	116
VI.2 - Exemplo 1.....	116
VI.3 - Exemplo 2.....	118
VI.4 - Exemplo 3.....	118
VI.5 - Exemplo 4.....	118
VI.6 - Exemplo 5.....	122
VI.7 - Exemplo 6.....	128
VI.8 - Exemplo 7.....	128
VI.9 - Exemplo 8.....	140

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES.....	150
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	154

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ \underline{T} PARA O ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA.....	158
---	-----

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES \underline{J} , \underline{J}^{-1} e \underline{T} PARA OS ELEMENTOS DE CASCA GERAL E DE TRANSIÇÃO.....	161
--	-----

APÊNDICE C

DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES \underline{R} E $\hat{\underline{R}}$	167
---	-----

APÊNDICE D

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA LINGUAGEM DO SISTEMA.....	174
---	-----

C A P Í T U L O I

INTRODUÇÃO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1 - Generalidades e Histórico

O Método dos Elementos Finitos desenvolveu-se enormemente no decorrer dos últimos 25 anos, e está hoje em dia consagrado como uma importante ferramenta de aplicação imediata em diversos ramos da Engenharia. Foi originalmente concebido para a análise de estruturas, e, apesar de ser utilizado em diversas outras áreas (transmissão de calor, hidrodinâmica, percolação em solos, etc), ainda é mais utilizado para este propósito.

As pesquisas mais recentes têm se dirigido para a análise dinâmica e não-linear de estruturas; costuma-se considerar que a análise estática linear é um campo praticamente esgotado. No entanto, em 1975 Felippa¹ propôs um enfoque diferente para a análise de um determinado tipo de estrutura, o qual ofereceria vantagens muito atraentes sobre o modelo até hoje utilizado, em termos de precisão e economia computacional.

O tipo de estrutura considerado foi denominado por Felippa como "estrutura quasi-axissimétrica". Estruturas desta classe são frequentemente encontradas em diversas aplicações industriais, notadamente na área nuclear; são caracterizadas por uma geometria basicamente axissimétrica, perturbada por "irregularidades localizadas" (furos, bocais, etc). Em uma análise mais rigorosa, estas estruturas deveriam ser modeladas por elementos tridimensionais gerais, sem tomar partido da axisimetria predominante; outra opção seria obter uma solução

aproximada com um modelo axissimétrico, simplesmente ignorando-se as irregularidades localizadas, que seriam então analisadas mais detalhadamente com um modelo tridimensional.

É evidente que ambas as soluções apresentadas acima apresentam desvantagens; a primeira pode levar a gastos computacionais excessivos e desnecessários, e a segunda pode apresentar resultados grosseiros. Um terceiro enfoque foi proposto por Felippa, pelo qual elementos de casca axissimétrica e elementos de casca tridimensional geral são empregados para modelar, respectivamente, as porções axissimétrica e geral da estrutura (Figura I.1), acoplando-se os dois sistemas na interface, através de equações de restrição generalizadas. Mais tarde, Pilkey e Park² sugerem uma formulação semelhante.

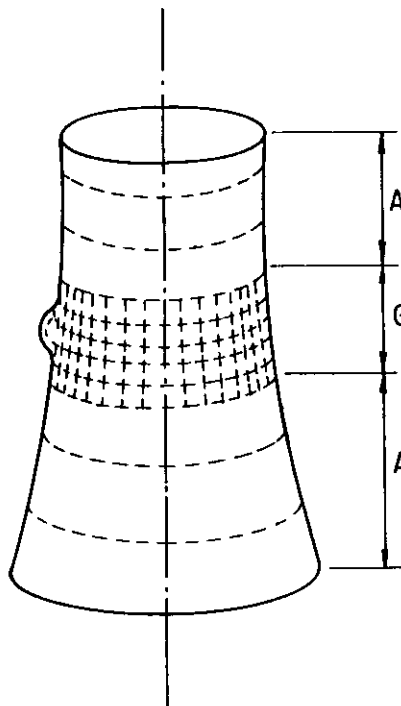


Figura I.1 - Estrutura Quasi-Axissimétrica

No entanto, estas formulações têm a desvantagem de não considerar a compatibilidade de deslocamentos na interface, já que na direção circunferencial os deslocamentos de um elemento de casca de revolução são expressos por série de Fourier, e em um elemento de casca geral são usadas funções de interpolação polinomiais. Uma formulação mais elaborada, que supera este problema, foi proposta por Han e Gould³, e será empregada para o desenvolvimento do sistema computacional para a análise de Cascas de Revolução com Irregularidades Localizadas - CRILLO, que é o objetivo deste trabalho.

1.2 - Elementos Utilizados

Uma estrutura como a Figura I.1 será modelada por malhas de elementos axissimétricos e tridimensionais, respectivamente, nas regiões axissimétrica e geral; a ligação entre estas duas regiões será efetuada por uma malha de "elementos de transição" (Figura I.2). Este elemento possui uma "linha nodal" na interface com a região axissimétrica, e pontos nodais nas demais fronteiras; desta forma tem a capacidade de minimizar as incompatibilidades cinemáticas, já que a linha nodal pode acomodar o desenvolvimento em série de Fourier do elemento axissimétrico, e os pontos nodais têm funções de interpolação idênticas às do elemento de casca geral.

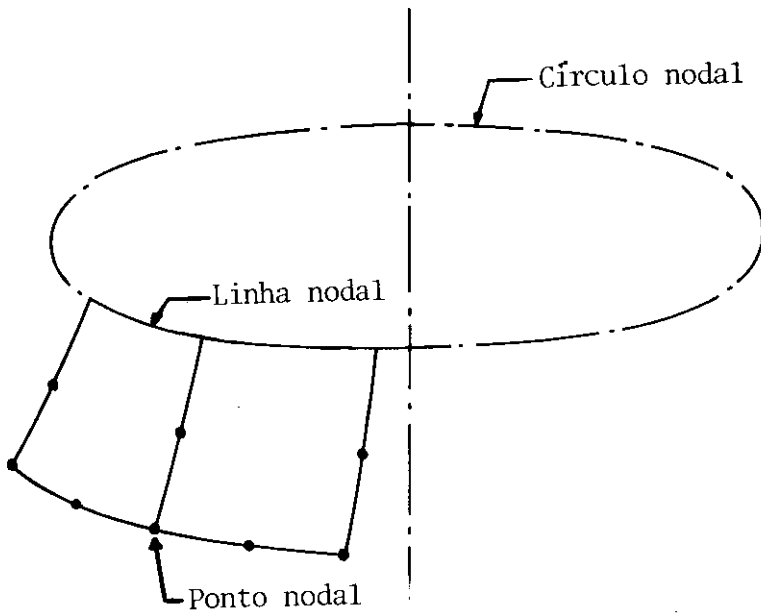


Figura I.2 - Elementos de transição

Os elementos de casca geral (Figura I.4) e axissimétrica (Figura I.3) aqui utilizados são obtidos degenerando-se, respectivamente, elementos isoparamétricos de sólido tridimensional e axissimétrico; têm funções de interpolação parabólicas e cinco graus de liberdade por nó. Em sua formulação despreza-se a energia de deformação das tensões normais à superfície média da casca, e considera-se que uma reta normal à superfície média permanece reta após a deformação, mas pode não permanecer normal: com isto o elemento pode sofrer deformações devido ao esforço cortante.

A matriz de rigidez do elemento de casca axissimétrica é obtida através do esquema de integração numérica reduzida⁴ com dois pontos de Gauss na direção de ξ , e integração explícita nas direções ζ e θ . O desenvolvimento para a obtenção da matriz de rigidez deste elemento será apresentado no Capítulo II.

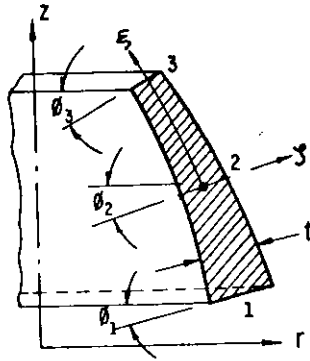
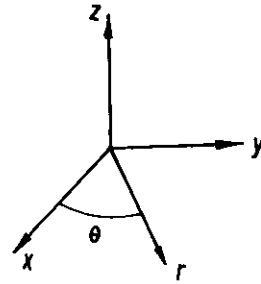
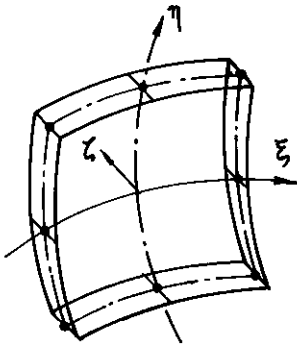
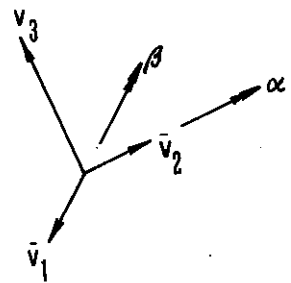
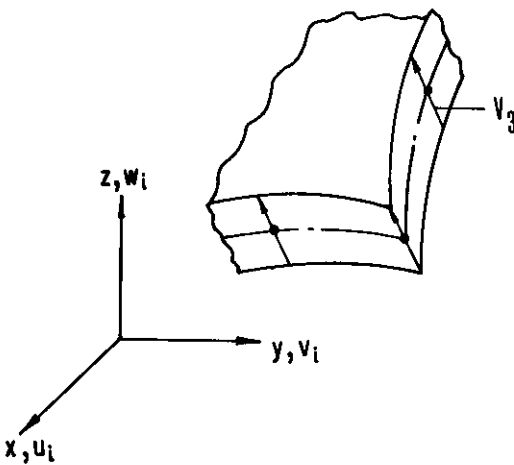


Figura 1.3 - Elemento Axissimétrico



(a) geometria e sistema global de coordenadas



(b) deslocamentos e sistema local de coordenadas

Figura 1.4 - Elemento Geral

Para os elementos de casca geral e de transição, utilizou-se o mesmo esquema de integração numérica reduzida, com 2×2 pontos de Gauss na superfície média, e integração explícita na direção ζ (normal à superfície média). O desenvolvimento para a obtenção da matriz de rigidez do elemento de transição será apresentado no capítulo III; a formulação do elemento de casca geral é obtida como um caso particular deste desenvolvimento, como será visto ao final deste capítulo.

O capítulo IV apresenta considerações sobre as técnicas utilizadas para a montagem, armazenamento e resolução do sistema de equações lineares que descreve o problema em estudo. O capítulo V contém a descrição do sistema computacional elaborado; os capítulos subsequentes apresentam exemplos resolvidos por este sistema, a análise dos resultados, conclusões e considerações finais.

C A P Í T U L O I I

ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

CAPÍTULO II

ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

II.1 - Definição da geometria

O elemento utilizado para representar a região axisimétrica de uma estrutura como o da Fig. I.1 é o mostrado na Fig. I.3, aonde está desenhado o sistema de coordenadas curvilíneas ξ e ζ . O sistema de coordenadas aqui adotado é o indicado na Fig. II.1, de coordenadas cilíndricas x , θ , z .

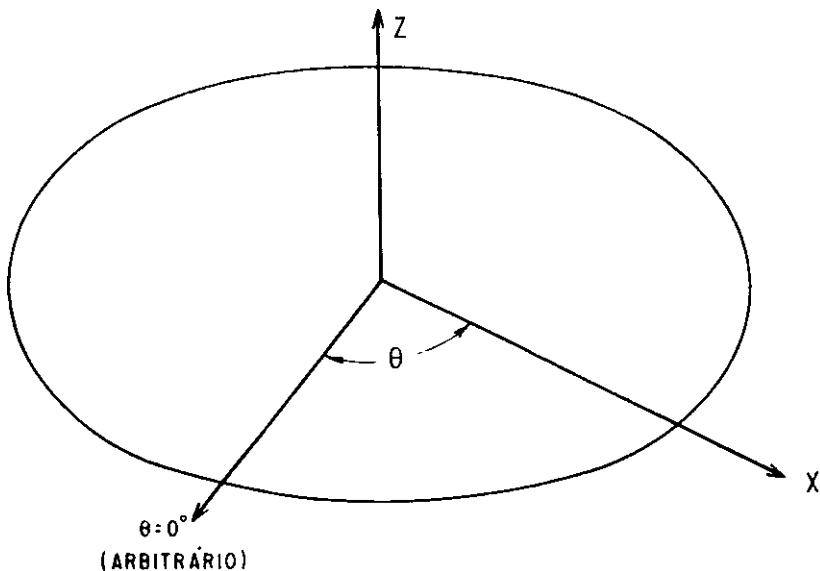


Figura II.1

O processo de transformação do elemento de sólido axisimétrico quadrático em um elemento de casca axisimétrica já é bem conhecido:^{5,6,7} reduziram-se suas dimensões na direção da espessura da casca e eliminaram-se os nós intermediários que

se encontram nesta direção (Fig.II.2.a). Pode-se, assim, relacionar as coordenadas globais de um ponto qualquer dentro do elemento com suas coordenadas curvilíneas pela expressão:

$$\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left(\frac{1+\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix}_S + \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \left(\frac{1-\xi}{2} \right) \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix}_I \quad (\text{II.1})$$

onde $N_i(\xi)$ são as funções de interpolação "Serendipity" quadráticas:

$$N_1 = \frac{1}{2} (\xi^2 + \xi)$$

$$N_2 = 1 - \xi^2 \quad (\text{II.2})$$

$$N_3 = \frac{1}{2} (\xi^2 - \xi)$$

x_i e z_i são as coordenadas cilíndricas dos nós, com $\theta = 0^\circ$.

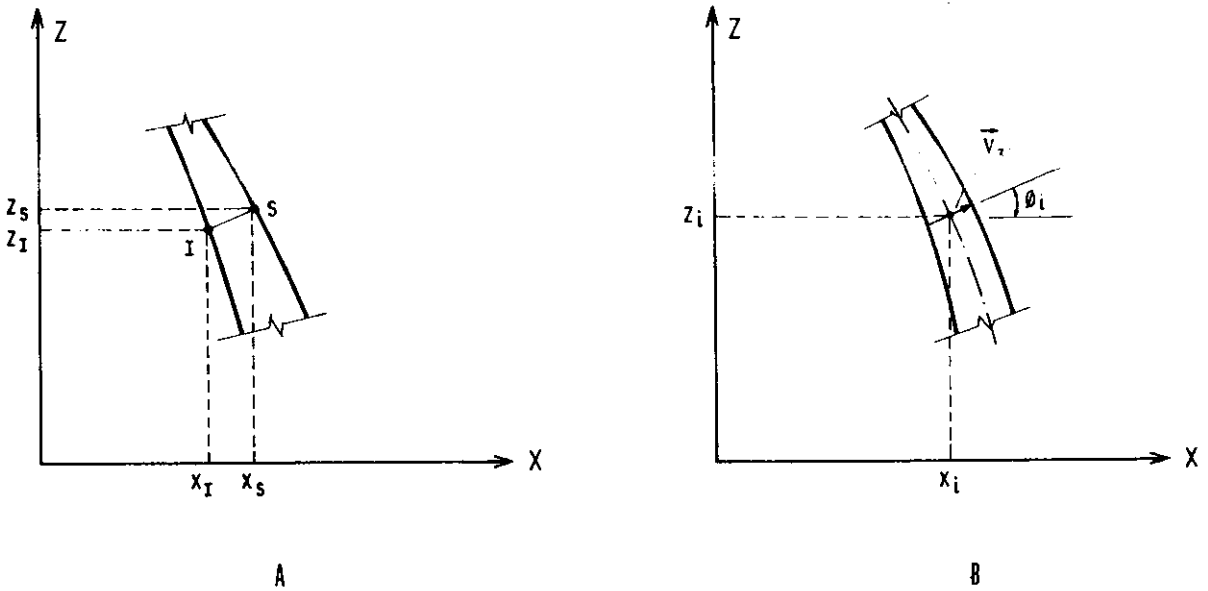


Figura II.2

No entanto, é conveniente reescrever (II.1) explicitando o "vetor espessura" \vec{V}_{3i} (que liga os pontos 'S' e 'I') e as coordenadas de nós na superfície média (Fig. II.2):

$$\begin{Bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 N_i(\xi) \frac{\zeta}{2} \vec{V}_{3i} \quad (\text{II.3})$$

onde

$$\vec{V}_{3i} = \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix}_S - \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix}_I = t_i \begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ 0 \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.4})$$

As seguintes expressões serão utilizadas posteriormente, para a obtenção da matriz jacobiana:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{Bmatrix} x_i \\ 0 \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\zeta}{2} t_i \begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ 0 \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} N_i t_i \begin{Bmatrix} \cos\phi_i \\ 0 \\ \sin\phi_i \end{Bmatrix} \quad (\text{II.6})$$

Para facilitar a programação automática do elemento, adota-se a notação

$$J_{11} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \quad ; \quad J_{13} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \quad ;$$

$$J_{31} = \frac{\partial x}{\partial \zeta} ; \quad J_{33} = \frac{\partial z}{\partial \zeta} \quad (\text{II.7})$$

As derivadas das funções de interpolação em (II.5) são:

$$\frac{\partial N_1}{\partial \xi} = \xi + \frac{1}{2} ; \quad \frac{\partial N_2}{\partial \xi} = -2\xi ; \quad \frac{\partial N_3}{\partial \xi} = \xi - \frac{1}{2} \quad (\text{II.8})$$

II.2 - Definição dos Deslocamentos

Como já se mencionou na introdução, não é levada em conta a energia de deformação normal à superfície média. Assim, o campo de deslocamentos para este elemento (e também para os elementos de casca geral e de transição, já que em suas formulações são comuns as mesmas hipóteses básicas) é definido em termos de apenas cinco graus de liberdade por nó.

Estes graus de liberdade são os seguintes: três componentes de translação ($u_{\phi i}$, $u_{\theta i}$, e u_{ni}) nas direções meridional, circunferencial e normal, respectivamente, e duas componentes de rotação (α_i e β_i) dadas pela rotação do vetor \vec{v}_{3i} em torno das direções circunferencial e meridional, respectivamente (Fig. II.3).

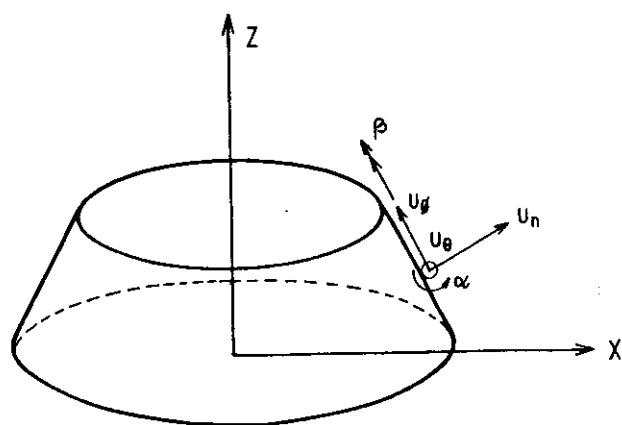


Figura II.3

No caso geral, o campo de deslocamentos não terá simetria de revolução; deve-se então expressar as componentes de deslocamentos ao longo do círculo nodal em função da coordenada θ , da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_{\phi i} \\ u_{\theta i} \\ u_{ni} \end{Bmatrix} = \sum_{j \geq 0} \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos j\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\phi i}^j \\ u_{\theta i}^j \\ u_{ni}^j \end{Bmatrix} + \sum_{j < 0} \begin{bmatrix} \sin j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\hat{u}_{\phi i}^j \\ -\hat{u}_{\theta i}^j \\ -\hat{u}_{ni}^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.9})$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \sum_{j \geq 0} \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 \\ 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_i^j \\ \beta_i^j \end{Bmatrix} + \sum_{j < 0} \begin{bmatrix} \sin j\theta & 0 \\ 0 & \cos j\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\hat{\alpha}_i^j \\ -\hat{\beta}_i^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.10})$$

As expressões (II.9) e (II.10) representam o desenvolvimento em série de Fourier dos deslocamentos ao longo da direção θ . Observe-se que a 1ª parcela destas expressões refere-se ao desenvolvimento simétrico, e a segunda ao desenvolvimento

antissimétrico, que pode ser omitido caso exista ao menos um eixo de simetria para a estrutura e o carregamento. No restante deste trabalho será utilizado apenas o desenvolvimento simétrico, já que para se obter o antissimétrico basta substituírem-se os senos pelos cossenos, e vice-versa. Ao final deste capítulo será demonstrado que, para o elemento de casca axissimétrica e $j > 0$, os termos da matriz de rigidez para a parcela antissimétrica são idênticos aos da parcela simétrica.

As expressões (II.9) e (II.10) ficam:

$$\begin{Bmatrix} u_{\phi i} \\ u_{\theta i} \\ u_{ni} \end{Bmatrix} = \sum_j \tilde{\theta}^j \begin{Bmatrix} u_{\phi i}^j \\ u_{\theta i}^j \\ u_{ni}^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.11})$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \sum_j \tilde{\theta}^j \begin{Bmatrix} \alpha_i^j \\ \beta_i^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.12})$$

onde

$$\tilde{\theta}^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \sin j\theta & 0 \\ 0 & 0 & \cos j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

$$\tilde{\theta}^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 \\ 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{II.14})$$

As componentes cartesianas dos deslocamentos de translação de um nó i (u_i , v_i , w_i) podem ser expressas por:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \tilde{T}_i \begin{Bmatrix} u_{\phi i} \\ u_{\theta i} \\ u_{ni} \end{Bmatrix} = \sum_j \tilde{T}_i \theta^j \begin{Bmatrix} u_{\phi i}^j \\ u_{\theta i}^j \\ u_{ni}^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

onde \tilde{T}_i é a matriz de transformação de coordenadas, dada por:

$$\tilde{T}_i = [\vec{v}_{1i} \quad \vec{v}_{2i} \quad \vec{v}_{3i}] \quad (\text{II.16})$$

onde \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} , \vec{v}_{3i} são os vetores unitários na direção meridional, circunferencial e normal, respectivamente. Esta matriz é dada por:

$$\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} \text{sen} \phi_i & 0 & \cos \phi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi_i & 0 & \text{sen} \phi_i \end{bmatrix} \quad (\text{II.17})$$

Pode-se agora estabelecer o campo de deslocamentos para o elemento de casca axissimétrica. As componentes cartesianas dos deslocamentos de translação de um ponto qualquer dentro do elemento serão expressas por (cf. expressões (II.12) e (II.15)):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_j \sum_{i=1}^3 N_i \tilde{T}_i \theta^j \begin{Bmatrix} u_{\phi i}^j \\ u_{\theta i}^j \\ u_{ni}^j \end{Bmatrix} + \sum_j \sum_{i=1}^3 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \tilde{T}_i \hat{\theta}^j \begin{Bmatrix} \alpha_i^j \\ \beta_i^j \\ \gamma_i^j \end{Bmatrix} \quad (\text{II.18})$$

onde

$$\underline{\hat{T}}_i = \begin{bmatrix} \vec{v}_{1i} & \vec{v}_{2i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi_i & 0 \\ 0 & 1 \\ \text{cos}\phi_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{II.19})$$

A expressão (II.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \underline{N}^* \underline{U}^e \quad (\text{II.20})$$

onde, se \underline{n} é o número total de harmônicos,

$$\underline{N}^* = \begin{bmatrix} \dots \vdots \begin{bmatrix} \underline{N}_1^{*j} & \underline{N}_2^{*j} & \underline{N}_3^{*j} \end{bmatrix} \vdots \dots \end{bmatrix}_{3 \times 15n} \quad (\text{II.21})$$

$$\underline{N}_i^{*j} = \begin{bmatrix} N_i & \underline{T}_i & \underline{\Theta}_i^j \end{bmatrix}_{3 \times 3} \vdots N_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} \hat{T}_i & \hat{\Theta}_i^j \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad (\text{II.22})$$

Além disso, os graus de liberdade do elemento são:

$$\underline{U}^e = \{ \dots \vdots \{ \underline{U}_1^{ej} \quad \underline{U}_2^{ej} \quad \underline{U}_3^{ej} \} \vdots \dots \}^T_{15n \times 1} \quad (\text{II.23})$$

onde, para um harmônico \underline{j} sobre um círculo nodal \underline{i} ,

$$\underline{U}_i^{ej} = \{ u_{\phi i}^j \quad u_{\Theta i}^j \quad u_{ni}^j \quad \alpha_i^j \quad \beta_i^j \} \quad (\text{II.24})$$

Nos desenvolvimentos posteriores, serão necessárias as derivadas dos deslocamentos em função das coordenadas curvilíneas:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\partial \tilde{N}^*}{\partial \xi} \tilde{U}^e \quad (\text{II.25})$$

Para um nó \underline{j} e um harmônico \underline{j} tem-se

$$\frac{\partial \tilde{N}_i^{*j}}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \tilde{T}_i \tilde{\theta}^j : \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\tilde{\theta}}^j \right] \quad (\text{II.26})$$

Substituindo (II.26) em (II.25) vem

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\rangle = \left[\begin{matrix} \vdots \\ \dots \vdots \dots \end{matrix} \left[\frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \tilde{T}_i \tilde{\theta}^j : \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\tilde{\theta}}^j \right] \begin{matrix} \vdots \\ \dots \vdots \dots \end{matrix} \right] \tilde{U}^e \quad (\text{II.27})$$

Procedendo analogamente para as derivadas em relação a ζ , tem-se

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \right\rangle = \left[\begin{matrix} \vdots \\ \dots \vdots \dots \end{matrix} \left[\begin{matrix} \tilde{0}_{3 \times 3} & \vdots & \tilde{N}_i & \frac{t_i}{2} & \hat{\tilde{T}}_i & \hat{\tilde{\theta}}^j \end{matrix} \right] \begin{matrix} \vdots \\ \dots \vdots \dots \end{matrix} \right] \tilde{U}^e \quad (\text{II.28})$$

As derivadas dos deslocamentos em relação à coor

denada θ são dadas por

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & T_i & \frac{\partial \hat{\theta}^j}{\partial \theta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ N_i & \zeta \frac{t_i}{2} & \hat{T}_i & \frac{\partial \hat{\theta}^j}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad (II.29)$$

onde

$$\frac{\partial \hat{\theta}^j}{\partial \theta} = j \begin{bmatrix} -\text{sen } j\theta & 0 & 0 \\ 0 & \cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & -\text{sen } j\theta \end{bmatrix} \quad (II.30)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}^j}{\partial \theta} = j \begin{bmatrix} -\text{sen } j\theta & 0 \\ 0 & \cos j\theta \end{bmatrix} \quad (II.31)$$

II.3 Matriz de Rigidez

A matriz de rigidez do elemento de casca axissimétrica será obtida fazendo-se

$$\underline{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \underline{B}'^t \underline{D}' \underline{B}' ||J|| r(\xi, \zeta) d\theta d\zeta d\xi \quad (II.32)$$

A matriz \underline{D}' é a matriz elástica, dada, para materiais isotrópicos, por:

$$D' = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \text{simétrico} & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\nu}{2k} & 0 \\ & & & & \frac{1-\nu}{2k} \end{bmatrix} \quad (\text{II.33})$$

Onde k é o fator de Reissner para o cortante, $k = 1, 2$.

\underline{B}' é a matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais:

$$\underline{\varepsilon}' = \underline{B}' \underline{U}^e \quad (\text{II.34})$$

onde

$$\underline{B}' = \begin{bmatrix} \dots & \vdots & \dots & B_i'^j & \dots & \vdots & \dots \end{bmatrix} \quad (\text{II.35})$$

e \underline{U}^e dado pelas relações (II.23) e (II.24).

Os vetores unitários \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} apresentados na expressão (II.16) definem um sistema local de coordenadas cilíndricas $x'\theta z'$ em um ponto i , nas direções meridional, circunferencial e normal da casca neste ponto i . As componentes de deformação $\underline{\varepsilon}'$ de (II.34) são definidas em relação a este sistema. Para obter essas componentes, e consequentemente a matriz \underline{B}' de (II.35), as seguintes transformações são necessárias:

a) Obtem-se as derivadas dos deslocamentos em coor

denadas cilíndricas globais $x\theta z$ através da relação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \tilde{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (\text{II.36})$$

onde

$$\tilde{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ J_{31} & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.37})$$

é a matriz jacobiana, obtida a partir das relações (II.5) e (II.6), e

$$\tilde{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{1}{\|J\|} \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \zeta} & 0 & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \|J\| & 0 \\ -\frac{\partial x}{\partial \zeta} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} IJ_{11} & 0 & IJ_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ IJ_{31} & 0 & IJ_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.38})$$

Para facilitar a notação e a programação automática, adotou-se

$$DJ = \|J\|$$

$$IJ_{11} = \frac{1}{\|J\|} \frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{J_{33}}{DJ}; \quad IJ_{13} = \frac{1}{\|J\|} \left(-\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = -\frac{J_{13}}{DJ}$$

$$IJ31 = \frac{1}{\|J\|} \left(- \frac{\partial x}{\partial \zeta} \right) = - \frac{J31}{DJ} ; \quad IJ33 = \frac{1}{\|J\|} \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{J11}{DJ} \quad (\text{II.39})$$

b) Em seguida, as derivadas dos deslocamentos em coordenadas globais $x\theta z$ assim obtidas são transportadas para o sistema local $x'\theta z'$ através da relação

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial v'}{\partial \theta} & \frac{\partial w'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{T}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \underline{T} \quad (\text{II.40})$$

onde a matriz de transformação de coordenadas (ou matriz de rotação) \underline{T} , analogamente a (II.16), é composta pelos vetores unitários \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , nas direções meridional, circunferencial e normal, respectivamente. A determinação de \underline{T} será apresentada no Apêndice A. Tem-se:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & -\frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{II.41})$$

Para facilitar a notação e a programação automática, adota-se:

$$T_{11} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2} = \sqrt{J_{13} \times J_{13} + J_{11} \times J_{11}}$$

$$T_{11} = -\frac{J_{11}}{T_{11}} = -T_{33} \quad (\text{II.42})$$

$$T_{13} = -\frac{J_{13}}{T_{11}} = T_{31}$$

e \underline{T} fica:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & 1 & 0 \\ T_{13} & 0 & -T_{11} \end{bmatrix} \quad (\text{II.43})$$

Nos sub-itens (a) e (b) acima foram apresentados os passos necessários para a obtenção das derivadas dos deslocamentos no sistema $x'\theta z'$. Em seguida serão explicitadas as transformações: substituindo a expressão (II.36) em (II.40), tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial v'}{\partial \theta} & \frac{\partial w'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{T}^t \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \underline{T} \quad (\text{II.44})$$

Aproveitando a condição de ortogonalidade entre os vetores que compõem as matrizes \underline{T} e \underline{J}^{-1} , obtém-se:

$$\underline{A} = \underline{T}^t \underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

onde

$$\begin{aligned} A_{11} &= T_{11} \times I_{J11} + T_{13} \times I_{J31} \\ A_{33} &= T_{13} \times I_{J13} + T_{11} \times I_{J33} \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

Substituindo-se (II.45) em (II.44):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial v'}{\partial \theta} & \frac{\partial w'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} & \frac{\partial v}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix}^T \quad (\text{II.47})$$

Desenvolvendo para a primeira linha da matriz \tilde{a} esquerda de (II.47):

$$\left\{ \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial w'}{\partial x'} \right\} = A_{11} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\}^T \quad (\text{II.48})$$

Transpondo (II.48) membro a membro, tem-se:

$$\left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{bmatrix} \right\rangle = A_{11} \tilde{T}^t \left\langle \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{bmatrix} \right\rangle \quad (\text{II.49})$$

Substituindo agora (II.27) em (II.49), obtem-se, para um nó \underline{i} e um harmônico j :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{bmatrix} = A11 \quad \tilde{T}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \tilde{T}_i \quad \tilde{\Theta}^j & \vdots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad \zeta \quad \frac{t_i}{2} \quad \hat{T}_i \quad \hat{\Theta}^j \end{bmatrix} \quad \underline{U}_i^{ej} \quad (II.50)$$

Fazendo o desenvolvimento análogo para a segunda e a terceira linhas, chega-se a: (of. eqs. (II.29) e (II.28)).

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial v'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w'}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \tilde{T}^t \begin{bmatrix} N_i \quad \tilde{T}_i \quad \frac{\partial \tilde{\Theta}^j}{\partial \xi} & \vdots & N_i \quad \zeta \quad \frac{t_i}{2} \quad \hat{T}_i \quad \frac{\partial \hat{\Theta}^j}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad \underline{U}_i^{ej} \quad (II.51)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = A33 \quad \tilde{T}^t \begin{bmatrix} 0 & \vdots & N_i \quad \frac{t_i}{2} \quad \hat{T}_i \quad \hat{\Theta}_i^j \\ \tilde{}_{3 \times 3} & \vdots & \end{bmatrix} \quad \underline{U}_i^{ej} \quad (II.52)$$

Operando o produto $\tilde{T}^t \quad \tilde{T}_i$ obtém-se (cf. expressões (II.43) e (II.17)):

$$\begin{bmatrix} T11 & 0 & T13 \\ 0 & 1 & 0 \\ T13 & 0 & -T11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi_i & 0 & \text{cos}\phi_i \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{cos}\phi_i & 0 & \text{sen}\phi_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} TF11_i & TF13_i \\ 0 & 1 \\ TF31_i & TF33_i \end{bmatrix} \quad (II.53)$$

onde

$$\begin{aligned}
 TF11_i &= -T11 \sin \phi_i + T13 \cos \phi_i = TF33_i \\
 TF13_i &= T11 \cos \phi_i + T13 \sin \phi_i = -TF31_i
 \end{aligned}
 \tag{II.54}$$

Para o produto $\hat{T}^t \hat{T}_i$ basta tomar as duas primeiras colunas do resultado de (II.52) (cf. expressão (II.19)).

Finalmente, substituindo os resultados de (II.13), (II.30) e (II.53) nas expressões (II.50), (II.51) e (II.52), operando as matrizes $\underline{\Theta}^j$ e $\hat{\Theta}^j$ (facilmente por se tratar de matrizes diagonais) e desenvolvendo linha por linha, obtém-se as expressões para as derivadas dos deslocamentos no sistema local $x'\theta z'$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u'}{\partial x'} &= \cos j\theta \left[A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{bmatrix} TF11_i & 0 & TF13_i \end{bmatrix} : A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} TF11_i & 0 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial v'}{\partial x'} &= \sin j\theta \left[A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial w'}{\partial x'} &= \cos j\theta \left[A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 & TF11_i \end{bmatrix} : A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial u'}{\partial \theta} &= \sin j\theta \left[-jN_i \begin{bmatrix} TF11_i & 0 & TF13_i \end{bmatrix} : -jN_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} TF11_i & 0 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial v'}{\partial \theta} &= \cos j\theta \left[jN_i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} : jN_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial w'}{\partial \theta} &= \sin j\theta \left[-jN_i \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 & TF11_i \end{bmatrix} : -jN_i \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial u'}{\partial z'} &= \cos j\theta \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : A33 N_i \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} TF11_i & 0 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej} \\
 \frac{\partial v'}{\partial z'} &= \sin j\theta \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : A33 N_i \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \underline{u}_i^{ej}
 \end{aligned}
 \tag{II.55}$$

Falta a parcela $\frac{\partial w'}{\partial z'}$: no entanto, esta corresponde à deformação normal à linha $\zeta = \text{cte.}$, que será desprezada, como foi mencionado no início do item II.2.

Necessita-se ainda das expressões de u e v ; desen -

volvendo a primeira e a segunda linhas de (II.18), tem-se:

$$\begin{aligned} u &= \cos j\theta \begin{bmatrix} N_i [-\sin\phi_i & 0 & \cos\phi_i] \\ \vdots \\ N_i \zeta \frac{t_i}{2} [-\sin\phi_i & 0] \end{bmatrix} \tilde{u}_i^{ej} \\ v &= \sin j\theta \begin{bmatrix} N_i [0 & 1 & 0] \\ \vdots \\ N_i \zeta \frac{t_i}{2} [0 & 1] \end{bmatrix} \tilde{u}_i^{ej} \end{aligned} \quad (II.56)$$

Aqui deve-se recordar que o objetivo é a determinação das componentes de deformação $\underline{\varepsilon}'$ de (II.34), para a obtenção da matriz B' . Estas deformações, definidas em relação ao sistema cilíndrico local $x'\theta z'$, são dadas por:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\phi \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{\phi\theta} \\ \gamma_\phi \\ \gamma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'} \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x'\theta} \\ \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{\theta z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{u}{x} + \frac{1}{x} \frac{\partial v'}{\partial \theta} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial u'}{\partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial x'} - \frac{v}{x} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{1}{x} \frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (II.57)$$

Substituindo-se (II.55) e (II.56) nas linhas de (II.57) obtem-se, finalmente, as expressões desejadas para as deformações no sistema local $x'\theta z'$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \cos j\theta \left[A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} [TF_{11i} \ 0 \ TF_{13i}] \vdots A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} [TF_{11i} \ 0] \right] \tilde{u}_i^{ej} \\ \varepsilon_\theta &= \cos j\theta \left[\frac{N_i}{x} [-\sin\phi_i \ j \ \cos\phi_i] \vdots \frac{N_i}{x} \zeta \frac{t_i}{2} [-\sin\phi_i \ j] \right] \tilde{u}_i^{ej} \\ \varepsilon_{x'\theta} &= \sin j\theta \left[\left[-\frac{jN_i}{x} TF_{11i} \quad A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{x} \quad -\frac{jN_i}{x} TF_{13i} \right] \vdots \right. \\ &\quad \left. \vdots \zeta \frac{t_i}{2} \left[-\frac{jN_i}{x} TF_{11i} \quad A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} - \frac{N_i}{x} \right] \right] \tilde{u}_i^{ej} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x'z'} &= \cos j\theta \left[A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 & TF11_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \frac{t_i}{2} \\ \vdots \end{matrix} \left[\zeta A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \begin{bmatrix} -TF13_i & 0 \end{bmatrix} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A33 N_i \begin{bmatrix} TF11_i & 0 \end{bmatrix} \right] \right] U_{\tilde{i}}^{ej} \\
\varepsilon_{\theta z'} &= \sin j\theta \left[\frac{jN_i}{x} \begin{bmatrix} TF13_i & 0 & -TF11_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \vdots \\ \frac{t_i}{2} \\ \vdots \end{matrix} \left[\zeta \frac{jN_i}{x} \begin{bmatrix} TF13_i & 0 \end{bmatrix} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A33 N_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \right] U_{\tilde{i}}^{ej}
\end{aligned} \tag{II.58}$$

Agrupando as linhas das expressões (II.58) obtem-se a forma final de uma submatriz \tilde{B}_i^{*j} de (II.35):

$$\tilde{B}_i^{*j} = \tilde{\Theta}^{*j} \tilde{B}_i^{*j} \tag{II.59}$$

onde

$$\tilde{\Theta}^{*j} = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin j\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \tag{II.60}$$

Para facilitar a notação e a programação automática, adota-se:

$$C1_i = A11 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \quad ; \quad C2_i = \frac{N_i}{x}$$

$$C3_i = A33 N_i \quad ;$$

e \tilde{B}_i^{*j} de (II.59) será dada por:

$$\begin{aligned}
 \bar{B}_i^{'j} = & \begin{bmatrix} C1_i & TF11_i & 0 & C1_i & TF13_i & 0 & 0 \\ -C2_i & \text{sen}\phi_i & jC2_i & C2_i & \text{cos}\phi_i & 0 & 0 \\ -jC2_i & TF11_i & C1_i - C2_i & -jC2_i & TF13_i & 0 & 0 \\ -C1_i & TF13_i & 0 & C1_i & TF11_i & \frac{t_i}{2} C3_i & TF11_i \\ jC2_i & TF13_i & 0 & -jC2_i & TF11_i & 0 & \frac{t_i}{2} C3_i \end{bmatrix} + \\
 & + \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C1_i & TF11_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C2_i & \text{sen}\phi_i & jC2_i \\ 0 & 0 & 0 & -jC2_i & TF11_i & C1_i - C2_i \\ 0 & 0 & 0 & -C1_i & TF13_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & jC2_i & TF13_i & 0 \end{bmatrix} \quad (II.61)
 \end{aligned}$$

Resta efetuar a integração (II.32). Algumas observações devem ser feitas:

- Na direção ξ integra - se numericamente, com dois pontos de Gauss em $\xi = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

- Na direção ζ integra - se explicitamente, considerando com aproximação razoável para cascas não muito espessas que o jacobiano independe de ζ , sendo calculado na superfície média, onde $\zeta = 0$. Observando-se a expressão (II.61) verifica-se que no produto $\bar{B}_i^{'t} \bar{D}_i' \bar{B}_i'$ aparecem:

a) Termos independentes de ζ , que ficarão:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\Pi} d\theta d\xi d\zeta = 2 \int_{-1}^1 \int_0^{2\Pi} d\theta d\xi \quad (\text{II.62})$$

b) Termos com ζ , que desaparecerão na integração de -1 a 1;

c) Termos com ζ^2 , que ficarão

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\Pi} \zeta^2 d\theta d\xi d\zeta = \frac{2}{3} \int_{-1}^1 \int_0^{2\Pi} d\theta d\xi \quad (\text{II.63})$$

- Na direção θ integra-se explicitamente, lembrando que:

$$\int_0^{2\Pi} \text{sen} m\theta \cos n\theta = 0, \text{ para qualquer valor de } m \text{ e } n; \quad (\text{II.64})$$

$$\int_0^{2\Pi} \text{sen} m\theta \text{sen} n\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 0, & m = n = 0; \\ \Pi, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

$$\int_0^{2\Pi} \cos m\theta \cos n\theta = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\Pi, & m = n = 0 \\ \Pi, & m = n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{II.66})$$

Mencionou-se anteriormente que, na formulação desenvolvida neste item, foi utilizado apenas o desenvolvimento simétrico da série de Fourier para os deslocamentos. Para se obter o desenvolvimento antissimétrico basta trocar em (II.60) os cossenos por senos e vice-versa. Neste caso, ao efetuar a integração em θ descrita acima, verifica-se que, a não ser para $m=n=0$ (II.65) e (II.66), o resultado não será alterado e os termos da ma-

triz de rigidez serão os mesmos obtidos para o desenvolvimento simétrico.

Para o caso particular $j = 0$, pode-se tomar:

- Em (II.24),

$$\tilde{U}^{e0} = \{u_{\phi i}^0 \quad \hat{u}_{\theta i}^0 \quad u_{ni}^0 \quad \alpha_i^0 \quad \hat{\beta}_i^0\} \quad (\text{II.67})$$

- Em (II.60),

$$\Theta^{*0} = [I]_{5 \times 5} \text{ (matriz identidade)}. \quad (\text{II.68})$$

Desta forma, o elemento está capacitado para a análise de esforços tangenciais constantes (problemas de torção).

C A P Í T U L O I I IELEMENTO DE TRANSIÇÃO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

CAPÍTULO III

ELEMENTO DE TRANSIÇÃO ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO

III.1 - Elemento de Casca Geral

O processo de transformação do elemento isoparamétrico tridimensional quadrático em um elemento de casca geral (Figura I.4) é similar ao descrito no item II.1: reduziram-se suas dimensões na direção da espessura da casca, eliminando-se os nós intermediários que se encontravam nesta direção. Em seguida, substituíram-se os pares de nós superiores e inferiores por nós na superfície média e "vetores espessura" definidos a partir das coordenadas dos nós suprimidos. Observa-se que, desta forma, considera-se que os lados do elemento na direção da espessura são retos.

Na Figura III.1 representa-se a superfície média deste elemento, com os nós numerados de 1 a 8, e as coordenadas curvilíneas locais ξ e η .

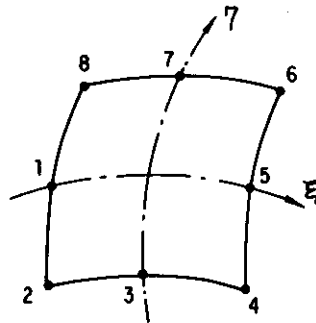


Figura III.1

Elemento de Casca Geral (superfície média)

A geometria do elemento de casca geral é definida pela seguinte expressão:

$$\begin{Bmatrix} r \\ \theta \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} r_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i(\epsilon, \eta) \frac{\zeta}{2} \vec{V}_{3i} \quad (\text{III.1})$$

Note-se que foram utilizadas coordenadas cilíndricas, já que tanto o elemento de casca geral quanto o de transição serão usados em estruturas predominantemente axissimétricas.

Na expressão (III.1) r , θ e z são as coordenadas cilíndricas de um ponto arbitrário de coordenadas locais ξ, η e ζ ; r_i , θ_i e z_i são as coordenadas cilíndricas dos nós; \vec{V}_{3i} é um vetor aproximadamente normal à superfície média, cujo módulo é igual à espessura da casca no nó i . N_i são as funções de interpolação "Serendipity" quadráticas. Seguindo a numeração adotada para os nós do elemento de casca geral (Figura III.1), estas funções são⁶:

$$N_1 = 0.5 (1-\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{III.2.a})$$

$$N_2 = -0.25 (1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \quad (\text{III.2.b})$$

$$N_3 = 0.5 (1-\xi^2)(1-\eta) \quad (\text{III.2.c})$$

$$N_4 = 0.25 (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \quad (\text{III.2.d})$$

$$N_5 = 0.5 (1+\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{III.2.e})$$

$$N_6 = 0.25 (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (\text{III.2.f})$$

$$N_7 = 0.5 (1-\xi^2)(1+\eta) \quad (\text{III.2.g})$$

$$N_8 = 0.25 (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \quad (\text{III.2.h})$$

III.2 - Elemento de Transição - a Linha Nodal

O elemento de transição³ (Figura I.2) tem formulação semelhante à do elemento de casca geral; no entanto, possui uma "linha nodal" na fronteira superior (correspondente a $\eta=1$ na Figura III.2), que compõe a interface com a região axissimétrica.

Esta linha nodal pode ser encarada, conceitualmente, como um "nó móvel" que percorre a fronteira superior do elemento.

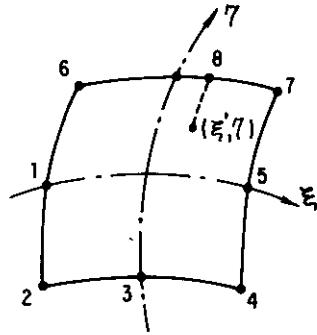


Figura III.2

Elemento de Transição - Superfície Média

Mencionou-se na introdução que será considerada a compatibilidade de deslocamentos na interface entre as regiões geral e axissimétrica. Para isto a linha nodal do elemento de transição deve acomodar o desenvolvimento em série de Fourier para os deslocamentos, já que o elemento axissimétrico da Figura (I.3) utiliza a série de Fourier para exprimir o campo de deslocamentos na direção circunferencial.

Ao longo da fronteira superior do elemento de transição (aonde $\eta=1$) o campo de deslocamentos pode ser expresso como uma função apenas da coordenada curvilínea ξ . Para isto considere-se uma função $\Omega(\xi)$, que tem a sua primeira derivada contínua, satisfazendo assim o critério de completitude para a convergência do modelo de deslocamentos do MEF; além disso, esta função admite um desenvolvimento em série de Fourier.

Para que haja compatibilidade de deslocamentos en-

tre os elementos, satisfazendo o critério de conformidade, deve-se construir uma função de interpolação $\Lambda(\xi, \eta)$ única para a linha nodal, que coincida com $\Omega(\xi)$ ao longo da fronteira superior, anule-se nos demais nós (numerados de 1 a 5 na Figura III.2) e tenha uma variação suave sobre o domínio da forma descrita a seguir.

Considere-se então a função

$$\Lambda(\xi, \eta) = \sum_{i=6}^8 N_i \lambda_i = N_6 \lambda_6 + N_7 \lambda_7 + N_8 \lambda_8 \quad (\text{III.3})$$

onde λ_i é o valor de Λ no nó i , e N_i são, dentre as funções de interpolação (III.2), as correspondentes aos nós da fronteira superior com a numeração da Figura III.2:

$$N_6 = 0.25 (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1) \quad (\text{III.4.a})$$

$$N_7 = 0.25 (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \quad (\text{III.4.b})$$

$$N_8 = 0.5 (1-\xi^2)(1+\eta) \quad (\text{III.4.c})$$

Fazendo-se agora,

$$N'_6 = 0.25 \eta (1+\eta)(1-\xi) \quad (\text{III.5})$$

$$N'_7 = 0.25 \eta (1+\eta)(1+\xi) \quad (\text{III.6})$$

$$\lambda'_8 = \lambda_8 - \frac{\lambda_6 + \lambda_7}{2} \quad (\text{III.7})$$

Pode-se reescrever (III.3) da forma

$$\Lambda(\xi, \eta) = N'_6 \lambda_6 + N'_7 \lambda_7 + N_8 \lambda'_8 \quad (\text{III.8})$$

A variação da função $\Lambda(\xi, \eta)$ de (III.8) ao longo do

elemento, estabelecida pelas relações (III.4.c), (III.5) e (III.6), pode ser encarada da seguinte maneira:

- a) Inicialmente os valores nodais λ_6 , λ_7 e λ_8' definem uma função quadrática ao longo da fronteira superior ($\eta=1$), Figura III.3.a, que é separada então em duas partes. A primeira é a contribuição de λ_6 e λ_7 , que varia linearmente ao longo de ξ , como indicam as equações (III.5), (III.6) e a Figura III.4.a; a segunda é a contribuição de λ_8' que varia quadraticamente em ξ , como indica a equação (III.4.c) e a Figura III.4.b.
- b) Em seguida, estas partes sofrem uma variação ao longo de η , como indicado na Figura III.3.b; a contribuição de λ_6 e λ_7 varia quadraticamente em η (vide novamente as Equações (III.5), (III.6) e Figura III.4.a) e a contribuição de λ_8' varia linearmente em η (vide novamente a equação (III.4.c) e a Figura (III.4.b)).

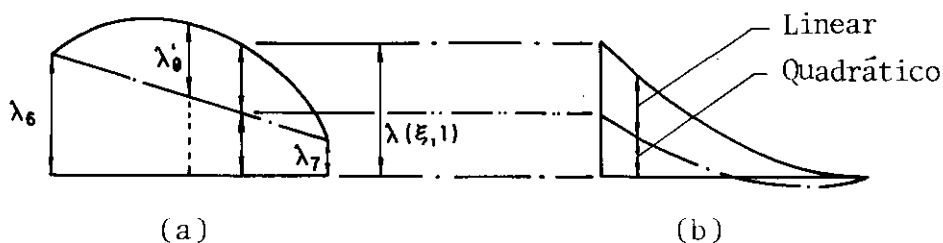
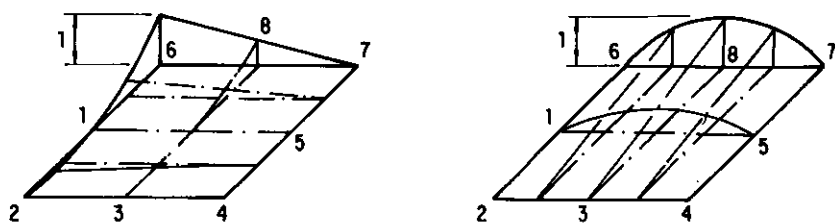


Figura III.3

Variação da Função Λ



a) Correspondente a λ_6

b) Correspondente a λ'_8

Figura III.4

Funções de Interpolação

Em resumo, as figuras (III.3) e (III.4) indicam que a função $\Lambda(\xi, \eta)$ pode ser dividida em duas partes; a primeira é a contribuição λ_6 e λ_7 , que varia linearmente ao longo de ξ e quadraticamente ao longo de η , e a segunda é a contribuição de λ'_8 , que varia quadraticamente ao longo de ξ e linearmente ao longo de η . Examinando-se as equações (III.4.c), (III.5) e (III.6) pode-se verificar também que $\Lambda(\xi, \eta)$ irá se anular para todos os nós que não pertençam à fronteira superior (os nós numerados de 1 a 5 na Figura III.2).

Admite-se agora, que a função arbitrária $\Omega(\xi)$ é aplicada na fronteira superior do elemento (Figura III.5.a). Para fazer com que a função $\Lambda(\xi, \eta)$ coincida com Ω ao longo da fronteira superior, aplica-se o conceito de "nó móvel" citado ao início deste item (Figura III.2): o valor nodal correspondente a cada ponto de coordenada ξ' por onde passa o nó móvel será igual ao valor da função $\Omega(\xi')$. Deseja-se também que $\Lambda(\xi, \eta)$ continue tendo uma variação suave sobre o domínio similar à da equação (III.8), e que continue valendo zero sobre os nós 1 a 5; para isto, im-

põe-se que o valor nodal correspondente ao nó móvel, $\Omega(\xi')$, tenha uma variação ao longo de η similar à representada na Figura III.3.b.

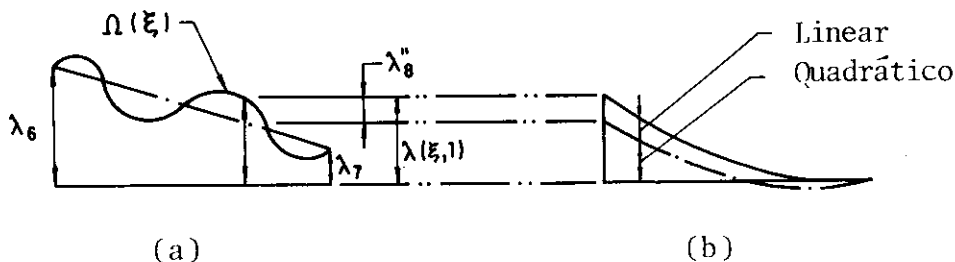


Figura III.5

Variação de Ω sobre o Domínio

Para satisfazer as condições citadas no parágrafo anterior, procede-se de modo análogo ao descrito para a obtenção da expressão (III.8), dividindo o valor $\Omega(\xi)$ em duas partes: a primeira variando linearmente e a segunda quadraticamente, ao longo de η .

Pode-se tomar (Figura III.5.a):

$$\lambda_6 = \Omega(-1) \quad (\text{III.9})$$

$$\lambda_7 = \Omega(+1) \quad (\text{III.10})$$

Agora faz-se, analogamente à Equação (III.7) onde se tinha $\xi = 0$:

$$\lambda_8'' = \Omega(\xi) - \frac{(1-\xi) \lambda_6 + (1+\xi) \lambda_7}{2} \quad (\text{III.11})$$

$$N_8' = 0.5 (1+\eta) \quad (\text{III.12})$$

e $\Lambda(\xi, \eta)$ fica

$$\Lambda(\xi, \eta) = N_6' \lambda_6 + N_7' \lambda_7 + N_8' \lambda_8'' \quad (\text{III.13})$$

Observando-se as relações (III.9), (III.10) e (III.11) pode-se verificar que λ_6 , λ_7 e λ_8'' não são graus de liberdade independentes: todos dependem da função $\Omega(\xi)$. Se, por exemplo, $\Omega_d(\xi)$ define uma componente de deslocamento, o único grau de liberdade independente sobre a fronteira superior será esta função, que define o valor do deslocamento $\Omega_d(\xi')$ quando o nó móvel 8 passa por $\xi = \xi'$. λ_6 , λ_7 e λ_8'' de (III.13) servem como artifícios para efetuar a variação de $\Omega_d(\xi')$ na direção η (Figura III.5), separando-a em uma parte linear e outra quadrática.

Substituindo-se agora (III.5), (III.6), (III.11) e (III.12) em (III.13), obtém-se

$$\begin{aligned} \Lambda(\xi, \eta) &= 0.25 \eta(1+\eta) (1-\xi) \lambda_6 + 0.25 \eta(1+\eta) (1+\xi) \lambda_7 + \\ &+ 0.5 (1+\eta) \left[\Omega(\xi) - \frac{(1-\xi) \lambda_6 + (1+\xi) \lambda_7}{2} \right] = \\ &= -0.25(1-\xi)(1-\eta^2) \lambda_6 - 0.25(1+\xi)(1-\eta^2) \lambda_7 + \\ &+ 0.5(1+\eta) \Omega(\xi) \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Redenominando-se as funções de interpolação N_6 , N_7 e N_8 , a equação (III.14) fica

$$\Lambda(\xi, \eta) = N_6 \lambda_6 + N_7 \lambda_7 + N_8 \lambda_8 \quad (\text{III.15})$$

onde

$$N_6 = -0.25(1-\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{III.16})$$

$$N_7 = -0.25(1+\xi)(1-\eta^2) \quad (\text{III.17})$$

$$N_8 = 0.5(1+\eta) \quad (\text{III.18})$$

e

$$\lambda_8 = \Omega(\xi) \quad (\text{III.19})$$

Pode-se verificar agora que as condições impostas para a função $\Lambda(\xi, \eta)$ foram satisfeitas:

- Substituindo-se o valor $\eta = 1$ nas equações (III.16) a III.18), a equação (III.15) recai em $\Lambda(\xi, 1) = \Omega(\xi)$;
- $\Lambda(\xi, \eta)$ anula-se para todos os pares de valores ξ_i e η_i correspondentes aos nós 1 a 5. Por exemplo, para o nó 1, de coordenadas curvilíneas $\xi = -1$ e $\eta = 0$, tem-se:

$$\Lambda(-1, 0) = -\frac{1}{2} \Omega(-1) + \frac{1}{2} \Omega(-1) = 0 \quad (\text{III.21})$$

As expressões (III.16) a (III.18) representam a forma final das funções de interpolação para a fronteira superior do elemento; juntamente com as cinco primeiras expressões (III.2), formam o conjunto completo das funções de interpolação para o elemento quadrático. Podem portanto ser utilizadas para a descrição da geometria e do campo de deslocamentos deste elemento, como será visto nos itens (III.3) e (III.4) a seguir.

Deve-se ressaltar agora que, como os graus de liberdade correspondentes aos nós 6, 7 e 8 não são independentes, con

sidera-se que estes nós são "sub-nós" dentro da "linha nodal". Assim, as funções de interpolação (III.16) a (III.18) para os sub-nós também devem ser consideradas como parcelas da função de interpolação para a linha nodal. O termo "ponto nodal" será utilizado de agora em diante para se referir aos nós independentes, numerados de 1 a 5 na Figura III.2. Observa-se também que a derivada de N_8 em relação a ξ é zero (vide Eq. III.18); no entanto a derivada de $N_8\lambda_8$ não será nula, já que $\lambda_8 = \Omega(\xi)$ tem ao menos sua primeira derivada contínua em relação a ξ . Isto se torna mais evidente ao lembrar que o papel das parcelas da função de interpolação para a linha nodal é variar o valor nodal λ_8 na direção η , já que o próprio λ_8 é variável na direção ξ .

III.3 - Definição da Geometria

Uma vez obtidas as funções de interpolação N_i para o elemento de transição, dadas pelas expressões (III.2.a) a (III.2.e) e (III.16) a (III.18), sua geometria pode ser definida pela mesma expressão (III.1). No entanto, é importante observar agora que o nó móvel ($i=8$) possui a coordenada θ variável, em função de ξ . Esta variação é dada por:

$$\theta_8 = \frac{1-\xi}{2} \theta_6 + \frac{1+\xi}{2} \theta_7 \quad (\text{III.22})$$

Deve-se observar também que os "vetores espessura" \vec{V}_{3i} , expressos em componentes cilíndricas \vec{V}_{3ri} , $\vec{V}_{3\theta i}$ e \vec{V}_{3zi} , não variarão de um sub-nó a outro, já que a linha nodal do elemento de transição sempre estará na região axissimétrica da casca. (Veja-se o item C.2 do Apêndice C).

Para os desenvolvimentos posteriores, necessita-se

da matriz jacobiana, calculada a partir das seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \begin{Bmatrix} r_i \\ \theta_i \\ z_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \frac{\xi}{2} \vec{V}_{3i} \quad (\text{III.23})$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} N_i \vec{V}_{3i} \quad (\text{III.24})$$

Para $\frac{\partial r}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial z}{\partial \xi}$, as expressões são análogas às (III.23) bastando substituir η por ξ . A expressão $\frac{\partial \theta}{\partial \xi}$ não é análoga às anteriores, pois a coordenada θ_8 tem derivada não nula em relação a ξ . Tem-se então

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \theta_i + N_8 \frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} + \sum_i \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \frac{\xi}{2} \vec{V}_{3i} \quad (\text{III.25})$$

onde

$$\frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} = \frac{\theta_7 - \theta_6}{2} \quad (\text{III.26})$$

III.4 - Definição dos Deslocamentos

O campo de deslocamentos de um elemento de casca ge

ral isoparamétrico quadrático é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^8 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

Foi visto que o elemento de transição quadrático possui cinco pontos nodais $i = 1$ a 5 , e três sub-nós que compõem na linha nodal, numerados $i = 6$ a 8 . Para cada um dos pontos nodais, os graus de liberdade são três componentes cartesianas de translação u_i , v_i e w_i e duas componentes de rotação α_i e β_i (Fig. I.4.b). Para a linha nodal, os graus de liberdade são os mesmos dos de um círculo nodal de um elemento de casca axissimétrico (cf. item II.2). Dessa maneira, observando - se as relações (II.18) e (II.27) verifica-se que o campo de deslocamentos para o elemento de transição é dado por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^5 N_i \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^5 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} +$$

$$\sum_j \sum_{i=6}^8 N_i \hat{T}_i \hat{\theta}_i^j \begin{Bmatrix} u_\phi^j \\ u_\theta^j \\ u_n^j \end{Bmatrix} + \sum_j \sum_{i=6}^8 N_i \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \hat{\theta}_i^j \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix}$$

onde as duas primeiras parcelas correspondem à contribuição dos cinco pontos nodais, e as duas últimas correspondem à contribuição da linha nodal.

A matriz de transformação de coordenadas \underline{T}_i é composta pelos vetores unitários \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} (Figura I.4.b), que definem um sistema cartesiano local $x'y'z'$ para cada nó i . \vec{v}_{3i} é o vetor unitário normal à superfície média, definido a partir dos dados de entrada para o nó i ; os vetores \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{1i} são obtidos seguindo-se o mesmo procedimento descrito pelas equações (B.10) e (B.12) ou (B.15) e (B.16) do Apêndice B (vide também o item C.2 do Apêndice C). A matriz $\hat{\underline{T}}_i$ é obtida a partir de \underline{T}_i , simplesmente eliminando-se desta a terceira coluna, correspondente a \vec{v}_{3i} .

É importante ressaltar que, para um sub-nó \underline{i} de coordenada $\theta = 0^\circ$ sobre um círculo nodal, o sistema local assim definido coincidirá com o sistema local do elemento axissimétrico, ou seja, x' será a direção meridional, y' a circunferencial e z' a normal.

Deve-se observar que se suprimiu o índice \underline{i} para os graus de liberdade da linha nodal, já que, como foi ressaltado no item III.2, os sub-nós $i=6$ a 8 não possuem graus de liberdade independentes associados a cada um deles. Existe apenas um conjunto de cinco graus de liberdade independentes para cada harmônico sobre a linha nodal, que aliás são os mesmos para todos os elementos de transição, cujas linhas nodais estiverem sobre um mesmo círculo nodal (vide Figura I.2).

Mais uma observação deve ser feita agora: as matrizes $\underline{\theta}_{\underline{i}}^j$ e $\underline{\hat{\theta}}_{\underline{i}}^j$ (equações II.13 e II.14), como indica o índice \underline{i}

aposto a elas, são agora valores nodais, ou seja, estão colocadas em função das coordenadas θ_i dos sub-nós. Assim, as expressões (II.15) e (II.12) têm nova forma, para $i=6$ a 8:

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \underline{T}_i \sum_j \underline{\theta}_i^j \begin{Bmatrix} u_\phi^j \\ u_\theta^j \\ u_n^j \end{Bmatrix} \quad (\text{III.29})$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} = \sum_j \underline{\theta}_i^j \begin{Bmatrix} \alpha_i^j \\ \beta_i^j \end{Bmatrix} \quad (\text{III.30})$$

A expressão (III.28) pode ser escrita:

$$\begin{Bmatrix} \underline{u} \\ \underline{v} \\ \underline{w} \end{Bmatrix} = \underline{N}^* \underline{U}^e \quad (\text{III.31})$$

Aqui, para um total de J harmônicos a "matriz de interpolação" \underline{N}^* é dada por:

$$\underline{N}^* = [\underline{N}_1^* \dots \underline{N}_i^* \dots \underline{N}_5^* \vdots \dots \underline{N}^{*j} \dots]_{3 \times (25+5J)} \quad (\text{III.32})$$

e os graus de liberdade \underline{U}^e do elemento são

$$\underline{U}^e = \{\underline{U}_1^e \dots \underline{U}_i^e \dots \underline{U}_5^e \vdots \dots \underline{U}^{ej} \dots\}^T \quad (\text{III.33})$$

Em (III.32) tem-se, para um ponto nodal \underline{i} :

$$\underline{N}_i^* = \left[\begin{array}{c|c} N_i & \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \\ \hline I_{3 \times 3} & \hat{T}_i \end{array} \right]_{3 \times 5} \quad (\text{III.34})$$

onde I é a matriz identidade; para um harmônico j sobre a linha nodal,

$$\underline{N}^{*j} = \sum_{i=6}^8 \left[\begin{array}{c|c} N_i & \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \\ \hline T_i & \hat{\theta}_i^j \end{array} \right]_{3 \times 5} \quad (\text{III.35})$$

Os graus de liberdade para um ponto nodal são,

$$\underline{U}_i^e = \{u_i \ v_i \ w_i \ \alpha_i \ \beta_i\}^T \quad (\text{III.36})$$

e para um harmônico j sobre a linha nodal,

$$\underline{U}^{ej} = \{u_\phi^j \ u_\theta^j \ u_n^j \ \alpha^j \ \beta^j\}^T \quad (\text{III.37})$$

Nos desenvolvimentos posteriores deve-se calcular as derivadas dos deslocamentos em função das coordenadas curvilíneas ξ , η e ζ . É importante observar que as matrizes \underline{T}_8 e $\underline{\theta}_8^j$, correspondentes ao nó móvel, têm derivadas não nulas em relação a ξ . Assim, derivando a expressão (III.31):

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{array} \right\} = \frac{\partial \underline{N}^*}{\partial \xi} \underline{U}^e \quad (\text{III.38})$$

Derivando a expressão (III.34) tem-se, para um ponto nodal i :

$$\frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \tilde{I} & \vdots & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Procedendo-se de modo análogo para as derivadas em relação a η e ζ , obtem-se:

$$\frac{\partial \tilde{N}_i^*}{\partial \eta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \eta} \tilde{I} & \vdots & \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \eta} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{\partial \tilde{N}_i^*}{\partial \zeta} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & N_i \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \\ 3 \times 3 & & 3 \times 2 \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (\text{III.41})$$

Derivando a expressão (III.35) tem-se para um harmônico j sobre a linha nodal:

$$\frac{\partial \tilde{N}^{*j}}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \sum_{i=6}^8 \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \tilde{T}_i \tilde{\theta}_i^j + N_8 \tilde{R} & \vdots & \sum_{i=6}^8 \frac{\partial \tilde{N}_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\tilde{\theta}}_i^j + N_8 \zeta \frac{t_8}{2} \hat{\tilde{R}} \\ 3 \times 2 & & 3 \times 5 \end{bmatrix}$$

onde

(III.42)

$$\tilde{R} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{T}_8}{\partial \xi} \tilde{\theta}_8^j + \tilde{T}_8 \frac{\partial \tilde{\theta}_8^j}{\partial \xi} \\ 3 \times 3 \end{bmatrix} \quad (\text{III.43})$$

$$\hat{\tilde{R}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\tilde{T}}_8}{\partial \xi} \hat{\tilde{\theta}}_8^j + \hat{\tilde{T}}_8 \frac{\partial \hat{\tilde{\theta}}_8^j}{\partial \xi} \\ 3 \times 2 \end{bmatrix} \quad (\text{III.44})$$

denadas \underline{T} , do mesmo modo que, em um nó i , \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} compunham a matriz \underline{T}_i descrita no item III.4. Para obter estas componentes de deformação $\underline{\varepsilon}'$, e consequentemente a matriz \underline{B}' de (III.49) devem-se efetuar transformações semelhantes às descritas no item (II.3):

- a) A partir das derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas curvilíneas, obtidas a partir das expressões (III.25), (III.28) e (III.29), obtém-se as derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas globais (analogamente à equação (II.36));
- b) em seguida estas derivadas são transportadas para o sistema local x' y' z' através de equação análoga à (II.40).

A determinação da matriz jacobiana \underline{J} a partir das expressões (III.23) a (III.26), de sua inversa \underline{J}^{-1} e da matriz de transformação de coordenadas \underline{T} , necessárias a estas transformações, está apresentada no Apêndice B.

Após estas transformações, chega-se a uma expressão semelhante à (II.44):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial \theta} & \frac{\partial v'}{\partial \theta} & \frac{\partial w'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \underline{T}^t \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \underline{T} \quad (\text{III.50})$$

Define-se agora a matriz \underline{A} como:

$$\underline{A} = \underline{T}^t \underline{J}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{III.51})$$

Novamente tirou-se partido da condição de ortogonalidade entre os vetores que compõem \underline{T} e \underline{J}^{-1} .

Substituindo-se (III.51) em (III.50) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial \eta} & \frac{\partial v'}{\partial \eta} & \frac{\partial w'}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \underline{T} \quad (\text{III.52})$$

Desenvolvendo para a primeira linha da matriz à esquerda de (III.52):

$$\left\{ \frac{\partial u'}{\partial x'} \quad \frac{\partial v'}{\partial x'} \quad \frac{\partial w'}{\partial x'} \right\} = A_{11} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \xi} \quad \frac{\partial v}{\partial \xi} \quad \frac{\partial w}{\partial \xi} \right\} \underline{T} + \\ + A_{12} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta} \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\} \underline{T} \quad (\text{III.53})$$

Transpondo (III.53) membro a membro:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix} = A_{11} \tilde{T}^t \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} \end{Bmatrix} + A_{12} \tilde{T}^t \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.54})$$

Substituindo agora em (III.54) as expressões das derivadas dos deslocamentos em função das coordenadas curvilíneas, obtidas através das relações (III.39) e (III.40), obtem-se para um ponto nodal i:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix} &= (A_{11} \tilde{T}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \underline{I} & \vdots & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} & \zeta & \frac{t_i}{2} & \hat{T}_i \end{bmatrix} + \\ &+ A_{12} \tilde{T}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \underline{I} & \vdots & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} & \zeta & \frac{t_i}{2} & \hat{T}_i \end{bmatrix}) \underline{U}_i^e = \\ &= C1_i \tilde{T}^t \begin{bmatrix} \underline{I} & \vdots & \frac{t_i}{2} & \hat{T}_i \\ & 3 \times 3 & & & & 3 \times 2 \end{bmatrix} \underline{U}_i^e \quad (\text{III.55}) \end{aligned}$$

onde

$$C1_i = A_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + A_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (\text{III.56})$$

Para um harmônico j da linha nodal, substitui-se

em (III.54), as expressões das derivadas dos deslocamentos em função das coordenadas curvilíneas, obtidas através das relações (III.42) e (III.45):

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} \end{Bmatrix} &= (A11 \quad \tilde{T}^t \left[\sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \tilde{T}_i \theta_i^j + N_8 \tilde{R} \right] \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \\
 &\quad \sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\theta}_i^j + N_8 \zeta \frac{t_8}{2} \hat{\tilde{R}} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right] + \\
 &+ A12 \quad \tilde{T}^t \left[\sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \tilde{T}_i \theta_i^j \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right. \\
 &\quad \left. \sum_{i=6}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\theta}_i^j \right] \tilde{U}^{ej} = \\
 &= \tilde{T}^t \left[\sum_{i=6}^8 C1_i \tilde{T}_i \theta_i^j + A11 N_8 \tilde{R} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \right. \\
 &\quad \sum_{i=6}^8 C1_i \zeta \frac{t_i}{2} \hat{\tilde{T}}_i \hat{\theta}_i^j + \\
 &\quad \left. A11 N_8 \zeta \frac{t_8}{2} \hat{\tilde{R}} \right] \tilde{U}^{ej} \quad (III.57)
 \end{aligned}$$

Fazendo o desenvolvimento análogo para a segunda e a terceira linhas da matriz à esquerda de (III.52), obtem-se:

- Para um ponto nodal i :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = C2_i T^t \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & \vdots & \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \end{bmatrix} U_i^e \quad (\text{III.58})$$

onde

$$C2_i = A21 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + A22 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (\text{III.59})$$

- Para um harmônico j sobre a linha nodal:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{Bmatrix} = T^t \begin{bmatrix} \sum_{i=6}^8 C2_i T_i \theta_i^j + A21 N_8 R_{3 \times 3} \end{bmatrix} U^{ej} \quad (\text{III.60})$$

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=6}^8 C2_i \zeta \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \hat{\theta}_i^j + A21 N_8 \zeta \frac{t_8}{2} \hat{R}_{3 \times 2} \end{bmatrix}_{3 \times 5} U^{ej}_{3 \times 5}$$

- Para um ponto nodal i :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{Bmatrix} = C3_i T^t \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & \vdots & \frac{t_i}{2} \hat{T}_i \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (\text{III.61})$$

onde

$$C3_i = A33 N_i \quad (\text{III.62})$$

- Para um harmônico \underline{j} sobre a linha nodal:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial y'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{Bmatrix} = \tilde{T}^t \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \frac{8}{\Sigma} & C3_i & \frac{t_i}{2} & \hat{T}_i & \hat{\theta}_i^j \\ 3 \times 3 & 1=6 & & & & 3 \times 2 & \end{bmatrix}_{3 \times 5} \quad (III.63)$$

Deve-se recordar que o objetivo é a determinação das componentes de deformação $\underline{\epsilon}'$ de (III.48), para a obtenção da matriz \underline{B}' . Estas deformações, definidas em relação ao sistema cartesiano local $x' y' z'$, são dadas por:

$$\underline{\epsilon}' = \begin{Bmatrix} \epsilon_{x'} \\ \epsilon_{y'} \\ \epsilon_{x'y'} \\ \epsilon_{x'z'} \\ \epsilon_{y'z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'} + \frac{\partial u'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial z'} \end{Bmatrix} \quad (III.64)$$

Substituindo as expressões obtidas para as derivadas dos deslocamentos em função das coordenadas cartesianas locais, (III.55) a (III.63), nas linhas da relação (III.64), e agrupando as relações assim obtidas em forma matricial, pode-se obter as submatrizes \underline{B}'_i e \underline{B}'^j de (III.49) através da expressão (III.48). Tudo isto constitui um trabalho algébrico extenso, e tem como resultado:

X - Para um ponto nodal i:

$$\tilde{B}'_i = \begin{bmatrix} C1_i T_{11} & C1_i T_{21} & C1_i T_{31} & 0 & 0 \\ C2_i T_{12} & C2_i T_{22} & C2_i T_{32} & 0 & 0 \\ C1_i T_{12} + C2_i T_{11} & C1_i T_{22} + C2_i T_{21} & C1_i T_{32} + C2_i T_{31} & 0 & 0 \\ C1_i T_{13} & C1_i T_{23} & C1_i T_{33} & \frac{t_i}{2} C3_i^{TT}_{11i} & \frac{t_i}{2} C3_i^{TT}_{12i} \\ C2_i T_{13} & C2_i T_{23} & C2_i T_{33} & \frac{t_i}{2} C3_i^{TT}_{21i} & \frac{t_i}{2} C3_i^{TT}_{22i} \end{bmatrix} +$$

$$+ \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C1_i^{TT}_{11i} & C1_i^{TT}_{12i} \\ 0 & 0 & 0 & C2_i^{TT}_{21i} & C2_i^{TT}_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & C1_i^{TT}_{21i} + C2_i^{TT}_{11i} & C1_i^{TT}_{22i} + C2_i^{TT}_{12i} \\ 0 & 0 & 0 & C1_i^{TT}_{31i} & C1_i^{TT}_{32i} \\ 0 & 0 & 0 & C2_i^{TT}_{31i} & C2_i^{TT}_{32i} \end{bmatrix} \quad (III.65)$$

onde os fatores T_{11} , T_{21} etc. são os elementos da matriz de transformação de coordenadas \underline{T} , e os fatores TT_{11i} , TT_{12i} etc. são os elementos da matriz 3x3 que resulta do produto $\underline{T}^t \underline{T}_i$: v_i

de também as equações (III.56), (III.59) e (III.62).

- Para um harmônico j sobre a linha nodal:

$$\tilde{B}^j = \sum_{l=6}^8 \left\{ \begin{array}{ccccc} C1_i^{TT}{}_{11i} & C1_i^{TT}{}_{12i} & C1_i^{TT}{}_{13i} & 0 & 0 \\ C2_i^{TT}{}_{21i} & C2_i^{TT}{}_{22i} & C2_i^{TT}{}_{23i} & 0 & 0 \\ C2_i^{TT}{}_{11i} + C1_i^{TT}{}_{21i} & C2_i^{TT}{}_{12i} + C1_i^{TT}{}_{22i} & C2_i^{TT}{}_{13i} + C1_i^{TT}{}_{23i} & 0 & 0 \\ C1_i^{TT}{}_{31i} & C1_i^{TT}{}_{32i} & C1_i^{TT}{}_{33i} & C3_i \frac{t_i}{2} TT_{11i} & C3_i \frac{t_i}{2} TT_{12i} \\ C2_i^{TT}{}_{31i} & C3_i^{TT}{}_{32i} & C2_i^{TT}{}_{32i} & C3_i \frac{t_i}{2} TT_{21i} & C3_i \frac{t_i}{2} TT_{22i} \end{array} \right\} +$$

$$+ \zeta \frac{t_i}{2} \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & C1_i^{TT}{}_{11i} & C1_i^{TT}{}_{12i} \\ 0 & 0 & 0 & C2_i^{TT}{}_{21i} & C2_i^{TT}{}_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & C2_i^{TT}{}_{11i} + C1_i^{TT}{}_{21i} & C2_i^{TT}{}_{12i} + C1_i^{TT}{}_{22i} \\ 0 & 0 & 0 & C1_i^{TT}{}_{31i} & C1_i^{TT}{}_{32i} \\ 0 & 0 & 0 & C2_i^{TT}{}_{31i} & C2_i^{TT}{}_{32i} \end{array} \right] \tilde{\theta}^j +$$

(segue)

$$+ N_8 \begin{bmatrix} A_{11} TR_{11} & A_{11} TR_{12} & A_{11} TR_{13} & 0 & 0 \\ A_{21} TR_{21} & A_{21} TR_{22} & A_{21} TR_{23} & 0 & 0 \\ A_{21} TR_{11} + A_{11} TR_{21} & A_{21} TR_{12} + A_{11} TR_{22} & A_{21} TR_{13} + A_{11} TR_{23} & 0 & 0 \\ A_{11} TR_{31} & A_{11} TR_{32} & A_{11} TR_{33} & 0 & 0 \\ A_{21} TR_{31} & A_{21} TR_{32} & A_{21} TR_{33} & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \zeta \frac{N_8 t_8}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & A_{11} TR_{11} & A_{11} TR_{12} \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} TR_{21} & A_{21} TR_{22} \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} TR_{11} + A_{11} TR_{21} & A_{21} TR_{12} + A_{11} TR_{22} \\ 0 & 0 & 0 & A_{11} TR_{31} & A_{11} TR_{32} \\ 0 & 0 & 0 & A_{21} TR_{31} & A_{21} TR_{32} \end{bmatrix} \quad (III.66)$$

onde os fatores TR_{11} , TR_{12} etc. são os elementos da matriz TR (3x3) que resulta do produto $\underline{T}^t \underline{R}$. Veja-se também as relações (III.18), (III.56), (III.59) e (III.62).

A matriz $\underline{\theta}^{*j}$ que multiplica as duas primeiras parcelas de (III.16) é dada por:

$$\tilde{\theta}^{*j} = \begin{bmatrix} \cos j\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin j\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos j\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos j\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin j\theta \end{bmatrix} \quad (\text{III.67})$$

A partir das expressões (III.65) e (III.66) pode-se montar a matriz \tilde{B}' de (III.49) e efetuar a integração de (III.47) para a obtenção da matriz de rigidez \tilde{K}^e . Utiliza-se o esquema de integração numérica reduzida sobre a superfície média, com 2 x 2 pontos de Gauss; na direção ζ utiliza-se o mesmo esquema de integração explícita descrito ao final do item II.3.

Observa-se que o desenvolvimento para o elemento de casca geral é um caso particular dentre o que foi exposto neste item. Para obter sua matriz de rigidez basta substituir \tilde{B}' de (III.49) por:

$$\tilde{B}' = [\tilde{B}'_1 \dots \tilde{B}'_8] \quad (\text{III.68})$$

e integrar normalmente (III.47)

C A P Í T U L O I VMONTAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

CAPÍTULO IV

MONTAGEM E RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

IV.1 - Generalidades

Na análise estática de estruturas pelo Método dos Elementos Finitos recai-se na resolução de um sistema de equações lineares da forma

$$\underline{K} \underline{U} = \underline{P} \quad (\text{IV.1})$$

onde \underline{K} é a matriz de rigidez global da estrutura, obtida pela soma das contribuições da matriz de rigidez \underline{K}^e de cada elemento que compõe a malha de elementos finitos; \underline{U} é o vetor de deslocamentos incógnitos nodais, e \underline{P} é o vetor de cargas nodais equivalentes. A forma e as dimensões da matriz de rigidez global \underline{K} , bem como a disponibilidade de memória central do computador utilizado, determinarão a escolha da técnica de armazenamento computacional a ser empregada; estes fatores em conjunto influenciarão na escolha do processo de resolução do sistema de equações.

Nos itens subsequentes serão abordadas as características da montagem do sistema (IV.1) inerentes ao problema em estudo, bem como as técnicas empregadas para o armazenamento e resolução deste sistema.

IV.2 - Estruturas Modeladas apenas por Elementos Axissimétricos

Em uma estrutura modelada apenas por elementos como o descrito no Capítulo II, a matriz de rigidez global pode ser montada da seguinte forma:

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ & \underline{\underline{K}}^1 & & & & & \cdot \\ & & \cdot & & & & \cdot \\ & & & \cdot & \underline{\underline{K}}^j & & \cdot \\ & \text{sim} & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & & \underline{\underline{K}}^J \end{bmatrix} \quad (\text{IV.2})$$

onde J é o número total de harmônicos considerados no desenvolvimento em série de Fourier para o caso de carregamento não a-xissimétrico, e $\underline{\underline{K}}^j$ tem a forma

$$\underline{\underline{K}}^j = \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{11}^j & \underline{\underline{K}}_{12}^j & \underline{\underline{K}}_{13}^j & & & & & & & \\ & \underline{\underline{K}}_{22}^j & \underline{\underline{K}}_{23}^j & 0 & & & & & & \\ & & \underline{\underline{K}}_{33}^j & \underline{\underline{K}}_{34}^j & \underline{\underline{K}}_{35}^j & & & & & \\ & & & \underline{\underline{K}}_{44}^j & \underline{\underline{K}}_{45}^j & \cdot & & & & \\ & & & & \underline{\underline{K}}_{55}^j & \cdot & \cdot & & & \\ & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & \text{SIMÉTRICA} & & & & & \cdot & \cdot & \underline{\underline{K}}_{N-2,N}^j & \\ & & & & & & & \cdot & \underline{\underline{K}}_{N-1,N}^j & \\ & & & & & & & & \underline{\underline{K}}_{NN}^j & \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

5N x 5N

onde N é o número total de nós - círculos nodais, neste caso - em que foi discretizada a estrutura. Cada submatriz que compõe $\underline{\underline{K}}^j$ tem cinco linhas e cinco colunas, correspondentes aos cinco graus de liberdade considerados por nó.

Em (IV.2) observa-se que, como não existe acoplamen-

to entre harmônicos, pode-se dividir o sistema de equações (IV.1) em J sistemas da forma

$$\underline{k}^j \underline{u}^j = \underline{p}^j \quad (IV.4)$$

e resolver cada um deles separadamente. Isto proporciona uma solução extremamente confortável e econômica, e para tal as incógnitas nodais devem ser ordenadas da seguinte forma:

$$\underline{u} = [[\underline{u}_1^{e1} \dots \underline{u}_i^{e1} \dots \underline{u}_N^{e1}] \dots [\underline{u}_1^{eJ} \dots \underline{u}_i^{eJ} \dots \underline{u}_N^{eJ}]] \quad (IV.5)$$

onde cada \underline{u}_j^{ej} contém os j-ésimos coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier para cada um dos cinco graus de liberdade considerados para o nó i (vide equação II.24).

A ordenação proposta em (IV.5) corresponde a agruparem-se as incógnitas nodais por harmônicos, e dentro de cada grupo a ordenação é feita seguindo-se a numeração adotada para os nós. Para este caso, e numerando-se adequadamente os nós da estrutura, a matriz de rigidez assume a característica de 'matriz banda' perfeita. Para a montagem e resolução do sistema de equações assim formado, rotinas que levem em conta esta característica são perfeitamente adequadas, não sendo necessário utilizar-se rotinas mais sofisticadas como as que se baseiam no conceito de 'skyline' ou perfil por altura efetiva de colunas.

IV.3 - Estruturas Quasi-Axissimétricas

Mencionou-se, no item III.4, que existe apenas um conjunto de cinco graus de liberdade independentes \underline{u}_i^{ej} , por harmônico de Fourier, correspondente a todas as linhas nodais que concorrem sobre um mesmo círculo nodal i (Figura I.2), e ao próprio círculo nodal i. Assim, na definição da conectividade de um elemento de transição, o usuário deve indicar apenas os

cinco pontos nodais (seguindo a ordem da Figura III.2) e o círculo nodal sobre o qual concorre a sua linha nodal. Os sub-nós que definem a linha nodal não possuem graus de liberdade independentes (como foi deduzido no item III.2), e por isto não participam da definição da conectividade e nem na composição do vetor de incógnitas nodais \underline{U} de (IV.1); a incidência da linha nodal deve ser definida à parte, através da coordenada angular θ de seus sub-nós 6 e 7 (Figura III.2). No Capítulo VI serão apresentados exemplos que demonstram estas peculiaridades na definição dos dados de um elemento de transição.

Considere-se então, para ilustrar a montagem da matriz de rigidez \underline{K} , uma estrutura discretizada por elementos axissimétricos, gerais e de transição. A malha utilizada tem N círculos nodais, L pontos nodais que pertencem a pelo menos um elemento de transição, e M pontos nodais que não pertencem a nenhum elemento de transição. As linhas nodais dos elementos de transição concorrem sobre os círculos nodais i e k . A forma da matriz de rigidez global desta estrutura dependerá da ordenação interna adotada para os graus de liberdade por harmônico de Fourier para os círculos nodais; a ordenação externa definida pelo usuário só se refere à numeração dos nós (círculos e pontos nodais). Se for adotada a ordenação interna dada pela equação (IV.5), a numeração dos nós não poderá ser intercalada; deve-se numerar inicialmente todos os círculos nodais e em seguida todos os pontos nodais, ou vice-versa. A matriz de rigidez global desta estrutura terá a seguinte forma:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_A^0 & 0 & . & . & . & . & 0 & \tilde{K}_{AT}^0 & 0 \\ & \tilde{K}_A^1 & . & & & & . & \tilde{K}_{AT}^1 & . \\ & & . & . & & & . & . & . \\ & & & \tilde{K}_A^j & . & & . & \tilde{K}_{AT}^j & . \\ & & & & . & . & . & . & . \\ & & & & & \tilde{K}_A^{J-1} & 0 & \tilde{K}_{AT}^{J-1} & . \\ & & & & & & \tilde{K}_A^J & \tilde{K}_{AT}^J & 0 \\ & & & & & & & \tilde{K}_T & \tilde{K}_{TG} \\ & & & & & & & & \tilde{K}_G \end{bmatrix} \quad (IV.6)$$

SIMÉTRICA

onde \tilde{K}_A^j é a mesma \tilde{K}^j de (IV.3); \tilde{K}_T é a sub-matriz $5L \times 5L$ correspondente aos pontos nodais que pertencem a pelo menos um elemento de transição, e \tilde{K}_G é a submatriz $5M \times 5M$ correspondente aos demais pontos nodais. \tilde{K}_{TG} contém os coeficientes de acoplamento entre os dois grupos de pontos nodais.

As submatrizes \tilde{K}_{AT}^j efetuam o acoplamento entre os graus de liberdade correspondentes aos pontos nodais dos elementos de transição e os correspondentes aos círculos nodais i e k . Para o exemplo em questão, têm a seguinte forma:

$$\tilde{K}_{AT}^j = \begin{bmatrix}
 & & & 0 & \\
 \hline
 K_{\tilde{i},N+1}^j & \cdot & \cdot & \cdot & K_{\tilde{i},N+L}^j \\
 \hline
 & & & 0 & \\
 \hline
 K_{\tilde{k},N+1}^j & \cdot & \cdot & \cdot & K_{\tilde{k},N+L}^j \\
 \hline
 & & & 0 &
 \end{bmatrix}$$

(IV.7)

Cada submatriz que compõe \tilde{K}_{AT}^j corresponde aos termos de acoplamento entre os deslocamentos de cada ponto nodal dos elementos de transição e o harmônico j dos deslocamentos dos círculos nodais i ou k e têm, portanto, cinco linhas por cinco colunas.

Observando-se as relações (IV.6) e (IV.7) pode-se chegar às seguintes conclusões quanto à resolução do sistema de equações (IV.1):

- De imediato, verifica-se que não é mais possível separar o sistema em J sistemas do tipo (IV.4);
- A utilização de rotinas que operem por largura de semi-banda é inviável, já que as submatrizes de acoplamento \tilde{K}_{AT}^j prejudicam a característica de banda da matriz de rigidez global, a não ser para os casos em que $J=1$ e $N \gg M$, o que não será comum neste tipo de estrutura.

- Mesmo rotinas que empregassem o conceito de altura efetiva de coluna seriam prejudicadas, devido ao grande número de coeficientes nulos que seriam armazenados e operados em cada submatriz K_{AT}^j , para $j > 0$.

IV.4 - Reordenação das Incógnitas Nodais

Conclui-se, pelo que foi exposto anteriormente, que não mais se justifica a utilização do esquema de ordenação das incógnitas nodais de (IV.5). A seguir será estudada a ordenação originalmente proposta por Crose¹ para estruturas axisimétricas com propriedades mecânicas variando ao longo da direção θ .

Considerando apenas os graus de liberdade correspondentes aos círculos nodais, esta ordenação será dada por

$$\underline{U} = [[\underline{U}_1^1 \dots \underline{U}_1^j \dots \underline{U}_1^J] \dots [\underline{U}_N^1 \dots \underline{U}_N^j \dots \underline{U}_N^J]] \quad (IV.8)$$

ou seja, os deslocamentos são agrupados por nós, e dentro de cada grupo a ordenação é feita por harmônicos; desta forma permite-se intercalar, na numeração dos nós, pontos nodais e círculos nodais.

Adotando-se uma numeração conveniente para os nós, a matriz de rigidez global da estrutura mencionada no item anterior toma a seguinte forma:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} \tilde{K}_{A_i} & \tilde{K}_{AT_i} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ & \tilde{K}_{T_i} & \tilde{K}_{T_i G} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ & & \tilde{K}_G & \tilde{K}_{T_k G} & \tilde{0} \\ & \text{SIMÉTRICA} & & \tilde{K}_{T_k} & \tilde{K}_{AT_k} \\ & & & & \tilde{K}_{A_k} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

onde \tilde{K}_G novamente é a submatriz correspondente aos pontos nodais que não pertencem a nenhum elemento de transição; \tilde{K}_{T_i} e \tilde{K}_{T_k} são as submatrizes correspondentes aos pontos nodais que pertencem aos elementos de transição, cujas linhas nodais concorrem sobre, respectivamente, o círculo nodal i e o círculo nodal k ; $\tilde{K}_{T_i G}$ e $\tilde{K}_{T_k G}$ são as submatrizes de acoplamento entre os dois grupos de pontos nodais, análogas a \tilde{K}_{TG} do item anterior.

A mudança proposta na ordenação dos graus de liberdade diz respeito apenas aos harmônicos de deslocamento sobre círculos nodais, e portanto não terá efeito na forma geral das submatrizes citadas no parágrafo anterior. As submatrizes \tilde{K}_{A_i} e \tilde{K}_{A_k} correspondem aos círculos nodais numerados, respectivamente, de 1 até i e de k até $k + N - i$, e terão a forma típica:

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_{A_i} = & \left[\begin{array}{ccccccccc}
 \tilde{K}_{A11} & \tilde{K}_{A12} & \tilde{K}_{A13} & & & & & & \\
 & \tilde{K}_{A22} & \tilde{K}_{A23} & 0 & & & & & 0 \\
 & & \tilde{K}_{A33} & \tilde{K}_{A34} & \tilde{K}_{A35} & & & & \\
 & & & \tilde{K}_{A44} & \tilde{K}_{A45} & \cdot & & & \\
 & & & & \tilde{K}_{A55} & \cdot & \cdot & & \\
 & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\
 & & & & & & \cdot & \cdot & \tilde{K}_{Ai-2,i} \\
 & & & & & & & \cdot & \tilde{K}_{Ai-1,i} \\
 & & & & & & & & \tilde{K}_{Aii}
 \end{array} \right] \quad (IV.10)
 \end{aligned}$$

SIMÉTRICA

onde cada submatriz que compõe \tilde{K}_A tem $5J$ linhas por $5J$ colunas correspondentes aos J coeficientes de Fourier para os cinco graus de liberdade por nó.

A consequência mais importante da reordenação proposta terá sido nas submatrizes de acoplamento entre os graus de liberdade correspondentes aos pontos nodais dos elementos de transição e os correspondentes aos círculos nodais i e k : ao invés da configuração de (IV.6), com J submatrizes do tipo (IV.7), tem-se agora duas submatrizes \tilde{K}_{AT_i} e \tilde{K}_{AT_k} , que terão a forma típica:

$$\tilde{K}_{AT_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hline \tilde{K}_{i,N+1}^{(0)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \tilde{K}_{i,N+L}^{(0)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{K}_{i,N+1}^{(J)} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \tilde{K}_{i,N+L}^{(J)} \end{bmatrix} \quad (IV.11)$$

rotinas que empreguem o conceito de altura efetiva de coluna (skyline).

IV.5 - Armazenamento do Sistema de Equações

No desenvolvimento do sistema CRILO adotou-se, então, a técnica de armazenamento em perfil de altura efetiva de colunas. Esta técnica consiste em armazenar, dentro de um vetor de trabalho \underline{A} , as colunas da matriz de rigidez \underline{K} , de cima para baixo, a partir do primeiro coeficiente não nulo até o coeficiente da diagonal principal, inclusive. Este armazenamento é feito sequencialmente, coluna por coluna.

Pode acontecer que, em computadores de menor porte, não se disponha de memória central suficiente para armazenar todas as colunas ativas de \underline{K} dentro do vetor de trabalho \underline{A} . Para contornar este problema, permite-se o particionamento da matriz \underline{K} em 'blocos' compostos por grupos de colunas, que serão armazenadas em um arquivo de memória auxiliar.

Os seguintes parâmetros são utilizados para a descrição da topologia do armazenamento da matriz \underline{K} :

- Número de equações do sistema - NEQ;
- um vetor de apontadores IPOS, com NEQ posições, que indica a posição de cada coeficiente da diagonal principal da matriz \underline{K} dentro do vetor de trabalho \underline{A} ;
- número de blocos - NBL;
- um vetor de apontadores MBL, com NBL posições, que indica o número da última coluna armazenada em cada bloco.

O número de equações NEQ e o vetor apontador IPOS

são obtidos a partir dos dados da malha de elementos finitos, levando-se em conta a ordenação adotada para as incógnitas nodais descrita no item anterior.

O número de blocos NBL é função do número de coeficientes de \underline{K} armazenados, e de TAMBL - o número máximo de posições permitidas em cada bloco. A variável TAMBL é especificada pelo usuário em função da capacidade do computador utilizado e de critérios de otimização: um valor muito grande para TAMBL pode representar gasto excessivo de memória, e um valor muito pequeno pode acarretar gastos excessivos em transferências entre a memória central e auxiliar, e em aumento no tempo de processamento. O caso particular TAMBL > NEQ corresponde ao armazenamento de todas as colunas ativas de \underline{K} dentro do vetor \underline{A} na memória central.

O vetor apontador MBL é facilmente obtido a partir do vetor IPOS e do tamanho máximo do bloco TAMBL. A partir dos elementos de IPOS e MBL pode-se conhecer a posição de qualquer coeficiente da matriz \underline{K} dentro do vetor de trabalho \underline{A} ; por exemplo, se \underline{A} contém os coeficientes do bloco IBL, um coeficiente $K(I,J)$ pertencente a este bloco ocupará a posição $A(L)$, onde

$$L = IPOS(J) + I - J - IPOS(IC1-1) \quad (IV.12)$$

e

$$IC1 = MBL(IBL-1) + 1 \quad (IV.13)$$

No caso particular IBL=1, substitui-se IPOS(IC1-1) por zero em (IV.12).

Os vetores \underline{P} de (IV.1) correspondentes a cada caso de carregamento serão armazenados sequencialmente em um úni-

co vetor de trabalho \underline{Q} na memória principal. Este esquema funciona bem em sistemas de computadores de porte razoável, evitando sucessivas transferências entre a memória principal e a auxiliar, que seriam necessárias caso se optasse por particionar o vetor \underline{Q} em blocos, como foi feito para a matriz dos coeficientes de rigidez \underline{K} . Para um número relativamente pequeno de casos de carregamento, a economia de memória não compensaria os gastos adicionais de leitura e gravação sobre disco magnético. No entanto, pretende-se implantar, posteriormente, este esquema de partição do vetor de termos de carregamento como uma alternativa, que pode se tornar mais útil se o equipamento disponível for um microcomputador.

IV.6 - Resolução do Sistema de Equações

Para a resolução do sistema de equações montado e armazenado na forma descrita nos itens anteriores, foi utilizado o método de Cholesky, operando-se segundo as colunas da matriz dos coeficientes.

O método de Cholesky pode ser dividido esquematicamente em três etapas:

- etapa de decomposição ou triangularização da matriz dos coeficientes \underline{K} sob a forma

$$\underline{K} = \underline{S}^t \underline{S} \quad (\text{IV.14})$$

onde \underline{S} é uma matriz triangular superior.

- etapa de substituição ou redução do(s) vetor(s) de cargas nodais equivalentes \underline{P} resolvendo-se

$$\underline{S}^t \underline{Y} = \underline{P} \quad (\text{IV.15})$$

- etapa de retrossubstituição, onde obtêm-se os veto

res das incógnitas nodais \underline{U} resolvendo-se

$$\underline{S} \underline{U} = \underline{Y} \quad (\text{IV.16})$$

Uma descrição mais detalhada da formulação do método de Cholesky e das técnicas de armazenamento mencionadas no item anterior pode ser encontrada nas referências (13) e (14).

C A P Í T U L O V

DESCRIÇÃO DO SISTEMA

CAPÍTULO V

DESCRIÇÃO DO SISTEMA

V.1 - Generalidades

Para a programação do sistema CRILO optou-se pela linguagem de alto nível FORTRAN IV. Trata-se de uma linguagem largamente empregada em programas para engenharia, padronizada e disponível em praticamente todos os sistemas de computadores, e até mesmo nos modelos mais recentes de microcomputadores. Apesar de todas as suas limitações técnicas e de ser baseada em conceitos já superados, em contraste com linguagens mais modernas como o ALGOL e PASCAL, o FORTRAN é, infelizmente, a escolha que se impõe para o desenvolvimento de software para engenharia.

O computador utilizado para o desenvolvimento deste sistema foi o Burroughs B6700 do Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ. O compilador FORTRAN deste computador admite instruções adicionais ao FORTRAN IV padrão; no entanto, procurou-se evitar o uso destas instruções, empregando-se um sub-conjunto de instruções compatível com os demais computadores. Em algumas partes da programação, considerações de eficiência e economia computacional impuseram o uso de comandos dependentes de máquina. Estes trechos (principalmente no controle de transferência de dados entre a memória principal e a auxiliar) estão isolados e bem documentados, de modo a permitir que o transporte deste sistema constitua-se em uma tarefa simples para um programador experiente.

A revolução provocada pelo vertiginoso desenvolvimento e popularização dos microcomputadores impõe que a facilidade

de de transporte de um sistema - que caracteriza sua "portabilidade" - seja também vertical, isto é, entre máquinas de capacidades diferentes. Para isto empregaram-se recursos como a utilização de rotinas de montagem e resolução do sistema de equações lineares (veja-se itens IV.5 e IV.6 no capítulo anterior) que permitem a utilização de memória auxiliar, um dado vital para a execução de programas de elementos finitos em microcomputadores.

Procurou-se atender aos requisitos de estruturação e modularidade na programação, de modo a facilitar a manutenção e posterior desenvolvimento do sistema, através da adição de novas subrotinas. Todos os dados e variáveis do problema são armazenados em vetores unidimensionais, e pretende-se, em uma versão posterior do sistema CRILLO, implantar o esquema de alocação de memória sugerido na referência [15]. Este esquema consiste no armazenamento de todos os vetores unidimensionais em um único vetor de trabalho, através de um conjunto de apontadores que indicam a posição das variáveis dentro deste vetor. A leitura e inicialização dos parâmetros necessários para a definição dos apontadores será efetuada no programa principal; estes apontadores serão redefinidos ao início de cada um dos módulos, de modo que os dados só ocuparão espaço na memória dentro das etapas em que forem realmente necessários. Assim, pode-se ter uma flexibilidade muito maior na determinação da capacidade do programa, já que esta capacidade dependerá tão somente da dimensão imposta para o vetor de trabalho, em função da capacidade do computador utilizado. A lógica e a clareza do programa não serão prejudicadas com o uso deste esquema, desde que se tenha o cuidado de documentar convenientemente o pro

grama principal com comentários indicando o significado de cada apontador; dentro de cada etapa, os parâmetros formais das subrotinas podem ser os vetores e matrizes em forma expandida.

Especial atenção foi conferida ao módulo de entrada de dados, que alguns autores consideram ser o mais importante em um sistema de análise estrutural por elementos finitos. De fato, a preparação manual dos dados de uma malha de elementos finitos requer do engenheiro um trabalho extenso, tedioso e sujeito a erros; além disso, muitos destes erros tornam-se de difícil percepção no meio de maciças listagens. Por isto, torna-se essencial que o módulo de entrada de dados seja constituído por um pré-processador capaz de interpretar, atribuir, gerar e criticar todos os dados da estrutura e dos carregamentos. O sistema CRILO conta com estes recursos, e foi desenvolvido de modo a se constituir em uma linguagem orientada que, sem sofisticacões desnecessárias, facilita em muito a comunicação entre o engenheiro e o computador.

De modo geral, considera-se que um "sistema computacional" é um programa projetado para permitir a solução de uma gama relativamente ampla de problemas dentro de uma determinada área, e possuindo uma estrutura modular que possibilita sua constante atualização e expansão. Além disso, pode dispor de facilidades para a entrada de dados que chegam ao nível de uma linguagem orientada. O sistema CRILO possui todas estas características e, quanto ao leque de problemas que pode ser resolvido, pode-se posteriormente ampliá-lo até mesmo ao ponto de o nome CRILO (Casca de Revolução com Irregularidades Localizadas) perder sua razão de ser. Atualmente, com os elementos descritos no item I.2, está capacitado a resolver os seguintes tipos

de estruturas:

- vigas-parede;
- placas sob flexão;
- cascas finas ou moderadamente espessas:
 - axissimétricas
 - gerais
 - predominantemente axissimétricas.

A caracterização de uma casca como sendo "geral" ou "predominantemente axissimétrica" é arbitrária, e é deixada a cargo do analista.

Permite-se a análise simultânea de diversos casos de carregamento (compostos por solicitações descritas no item V.2 a seguir), bem como a análise para deslocamentos prescritos. São fornecidas ao usuário informações sobre o tempo de processamento e IO consumido na execução de cada um dos módulos que compõem o sistema.

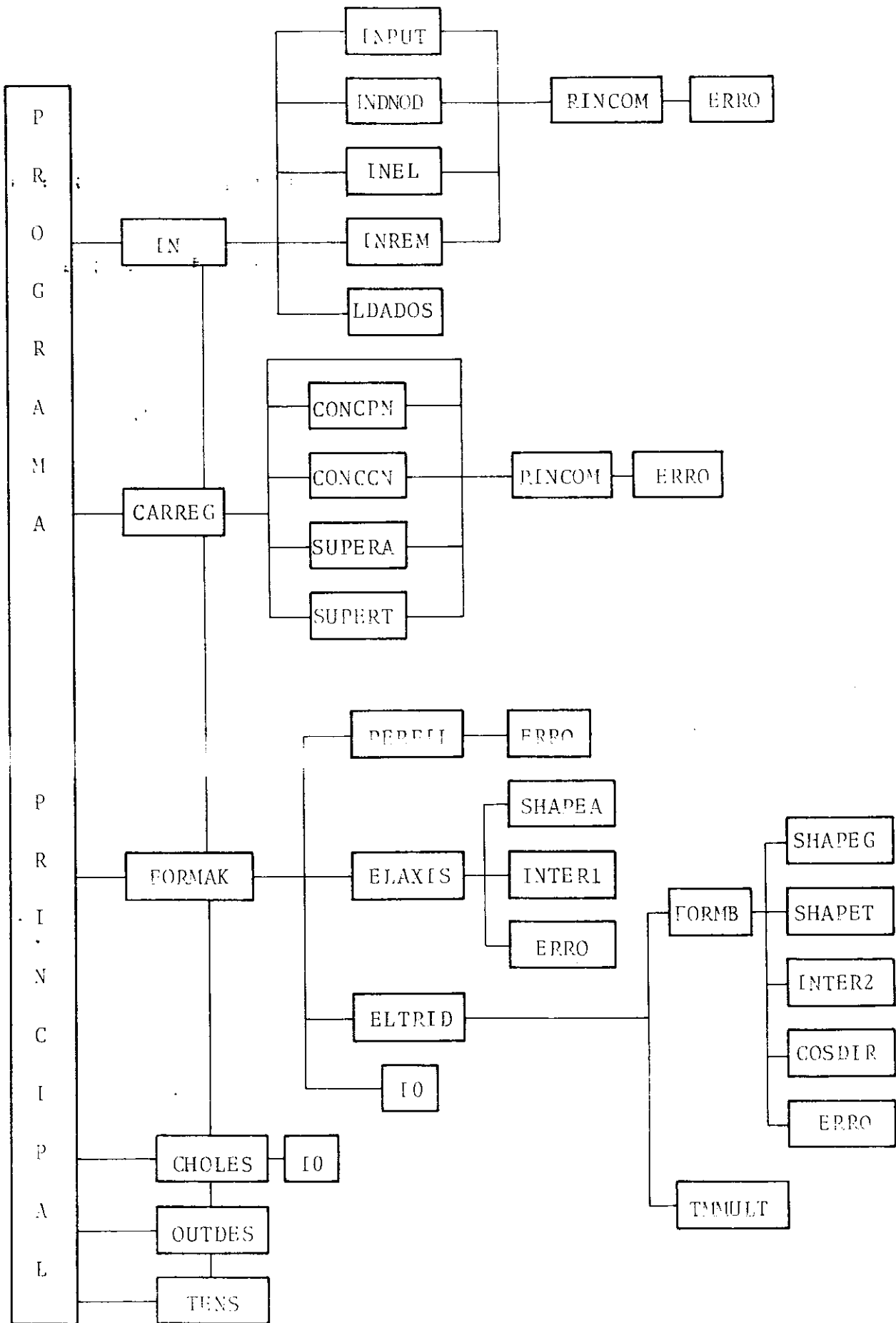
V.2 - Estrutura Geral da Programação

A seguir apresenta-se uma descrição sucinta dos módulos da versão corrente do sistema CRIL0, estruturados de acordo com o diagrama de blocos da Figura V.1.

V.2.1 - IN - Entrada de Dados Gerais e da Estrutura

Consiste basicamente na:

- Leitura e interpretação dos "comandos" da Linguagem, que definem os dados gerais e da estrutura, através do sub-programa interpretador RINCOM (Rotina de Interpretação de COMandos; veja-se os itens V.3 e V.4 para maiores detalhes).



- Atribuição, geração automática e crítica de consistência destes dados;
- Impressão de um "espelho" dos comandos lidos, e de mensagens de erro, se for o caso;
- Impressão de um relatório descritivo dos dados gerais e da estrutura (opcional, para re-exame e verificação pelo usuário).

V.2.2 - CARREG - Entrada de Dados de Carregamento e Montagem dos Vetores de Cargas Nodais Equivalentes.

Executa as mesmas funções descritas para a etapa anterior, agora sobre os comandos que definem os dados de cada caso de carregamento. Consideram-se os seguintes tipos de solicitação:

- Cargas concentradas sobre pontos nodais;
- Harmônicos de cargas sobre círculos nodais;
- Cargas distribuídas sobre a superfície dos elementos;
- Forças de massa (peso próprio) na direção z para estruturas axissimétricas ou quasi-axissimétricas, e com componentes nas três direções cartesianas globais para estruturas gerais.

Procede ao cálculo das cargas nodais equivalentes a solicitações sobre elementos, e soma-as sobre o vetor de cargas nodais P correspondente ao respectivo caso de carregamento.

Os módulos seguintes só serão executados se o comando 'ANALISE' for introduzido após a definição do último carregamento, e se não forem detectados erros na definição dos dados desta etapa e da anterior.

V.2.3 - FORMAK - Montagem da Matriz de Rigidez Global \underline{K}

Calcula os parâmetros e os vetores apontadores utilizados para a descrição da topologia do armazenamento da matriz \underline{K} , descritos no item IV.5.

Para cada bloco IBL em que foi particionada a matriz de rigidez, efetua as seguintes operações:

- Calcula a matriz de rigidez de cada elemento que contribui sobre este bloco, e procede ao espalhamento e soma desta matriz sobre o bloco, armazenado no vetor de trabalho \underline{A} .
- Introduz as condições de contorno, através da técnica do "número grande" (para o Burroughs B 6700 utilizou-se o valor 10^{20} , que apresentou bons resultados).
- Transfere os coeficientes do bloco para a memória auxiliar e reinicia para o bloco seguinte. Se não houver necessidade de particionamento da matriz \underline{K} , esta transferência não será feita e o programa passa à etapa seguinte, com \underline{K} totalmente armazenada na memória principal.

V.2.4 - CHOLLES - Resolução do Sistema de Equações

Resolve o sistema de equações algébricas lineares montado nos módulos anteriores, utilizando-se o Método de Cholesky adaptado à técnica de armazenamento em perfil de colunas ativas (veja-se os itens IV.5 e IV.6).

Se houver necessidade de particionamento da matriz \underline{K} , com a utilização da memória auxiliar, o procedimento para a resolução do sistema será o descrito a seguir:

- Transfere-se o primeiro bloco, do arquivo na memória auxiliar para a memória principal; efetua-se a decomposição dos coeficientes deste bloco e a substituição ou redução dos termos correspondentes no(s) vetor(s) de cargas nodais equivalentes.
- Cada bloco subsequente que possuir termos de acoplamento com o primeiro bloco será agora transferido para a memória principal, terá estes coeficientes de acoplamento operados, e será transferido de volta para a memória auxiliar.
- Transfere-se o primeiro bloco, totalmente decomposto, para a memória auxiliar; reiniciam-se os passos anteriores para o segundo bloco, e assim sucessivamente até o último.
- Pode-se agora iniciar a etapa de retrossubstituição, já que o último bloco está presente na memória principal; prossegue-se transferindo os demais blocos para a memória principal em ordem decrescente, operando-se para a obtenção dos termos correspondentes do(s) vetor(s) de incógnitas nodais.

Assim, necessita-se da presença simultânea de apenas dois blocos na memória principal, nas etapas de triangulação e substituição. A versão corrente do sistema CRIL0 prevê o uso de um arquivo sequencial para o armazenamento dos blocos da matriz \underline{K} , para minimizar as restrições quanto ao tipo de memória auxiliar disponível na configuração do computador utilizado. No entanto, se se optar por tirar partido das facilidades de acesso direto que um arquivo em disco magnético pode oferecer, bastará alterar adequadamente as chamadas da sub-ro-

tina IO dentro da sub-rotina CHOLES, ou, simplesmente, adaptar a própria sub-rotina IO (veja descrição destas rotinas no item V.3).

V.2.5 - OUTDES - Tratamento e Impressão dos Resultados de Deslocamento.

Efetua processamentos adicionais sobre os resultados obtidos nos módulos anteriores, principalmente sobre os resultados referentes aos círculos nodais, expressos em forma de valores dos termos do desenvolvimento em série de Fourier. A partir destes valores pode-se obter, utilizando expressões semelhantes à (II.9) e (II.10), resultados para qualquer ponto sobre os círculos nodais.

Imprime seletivamente os resultados. Comandos definidos no módulo IN permitem ao usuário optar pela impressão dos resultados para cada termo da série de Fourier, ou indicar as coordenadas angulares θ dos pontos sobre os círculos nodais onde deseja ver impressos os resultados finais.

V.2.6 - TENS - Cálculo e Impressão de Tensões

Obtém as tensões sobre os pontos nodais dos elementos, calculadas a partir dos deslocamentos obtidos; podem ser expressas no sistema local, global ou em ambos. Considera-se que os pontos mais adequados para uma avaliação precisa das tensões são os pontos de integração, principalmente em elementos isoparamétricos que se utilizam do esquema de integração reduzida (2×2). No entanto, a locação mais confortável, do ponto de vista do usuário, é sobre os nós dos elementos. Hinton e Owen¹⁷ propõem uma técnica de extrapolação bilinear, a partir dos valores das tensões nos 2×2 pontos de Gauss, para a obtenção dos valo-

res "suavizados" das tensões sobre os nós; valores únicos para estas tensões seriam então obtidos calculando-se a média das tensões em cada elemento que concorre sobre este nó. Uma próxima versão do sistema CRILO disporá deste recurso, mencionado aqui a título de ilustração.

V.3 - Descrição das Sub-Rotinas

Apresenta-se a seguir uma breve descrição das principais sub-rotinas que compõem a versão corrente do sistema CRILO. Inicialmente descrevem-se as sub-rotinas RINCOM, ERRO, IO e TEMPO, que são chamadas em mais de um módulo e/ou no programa principal; em seguida, descrevem-se as sub-rotinas correspondentes a cada módulo.

RINCOM - Rotina de INterpretação de COMandos. Controla o acesso ao arquivo de entrada que contém os comandos da linguagem utilizados para definir o modelo estrutural; os registros deste arquivo (que podem ser cartões perfurados ou registros físicos de 80 caracteres em disco ou fita magnética) são lidos em formato A1 e impressos logo em seguida. Cada chamada a RINCOM corresponde à interpretação de um comando; para isto, o acesso ao arquivo de entrada é controlado, de modo a prever os casos em que o registro contém dois ou mais comandos, ou, alternativamente, em que um comando ocupa dois ou mais registros; veja-se o item V.4.1. Neste item será visto também que os comandos são compostos por campos numéricos e campos alfanuméricos, delimitados por caracteres 'brancos'. Para a interpretação destes campos, RINCOM chama as seguintes sub-rotinas e funções, que não constam no diagrama da Figura V.1: INBRAN - função que procura e aponta o próximo carácter não-bran-

co, identificando o início de um campo; IBRANC - função que procura e aponta o próximo caracter branco, identificando o fim de um campo; CALF - sub-rotina que interpreta um campo alfanumérico; CNUM - sub-rotina que interpreta um campo numérico.

É chamado pelas sub-rotinas dos módulos IN e CARREG.

ERRO - Lê de um arquivo em disco a mensagem de erro requerida, e a imprime. É chamada de diversos pontos do sistema, principalmente por RINCOM e as sub-rotinas dos módulos IN e CARREG:

IO - Opera sobre um arquivo sequencial em memória auxiliar, de acordo com o valor fornecido ao parâmetro IOP: pode gravar, ler, avançar ou retroceder (backspace) registros, ou voltar ao início do arquivo (rewind). Pode ser adaptada facilmente para manipular arquivos de acesso direto. É chamada pelas sub-rotinas FORMAK e CHOLEs, para controlar as transferências dos blocos da matriz de rigidez global K entre a memória principal e a auxiliar.

TEMPO - Fornece informações sobre tempos de processamento e de entrada/saída (IO) gastos na execução de cada módulo, e acumula-os para fornecer o tempo total de análise. Utiliza o intrínseco TIME do B6700.

1º Módulo - Entrada de Dados Gerais e da Estrutura

IN - Controla a entrada e impressão dos dados gerais e da estrutura. Chama as sub-rotinas INPUT, INDNOD, INEL, INREM e LDADOS.

INPUT - Interpreta e critica os comandos que definem os dados

gerais, tais como o número de nós, de elementos, e atribui estes dados às variáveis correspondentes na memória principal.

Chama as sub-rotinas RINCOM e ERRO.

- INDNOD - Executa as mesmas funções descritas para INPUT, agora para os Dados Nodais (coordenadas, componentes do vetor espessura, etc.). Além da crítica sintática, efetua críticas de consistência; possui diversos esquemas de geração automática de dados nodais. Chama ATRIB (sub-rotina auxiliar, não representada no diagrama da figura V.1), RINCOM e ERRO.
- INEL - Executa as mesmas funções descritas para INDNOD, agora para os dados dos Elementos (tipo, incidência, etc). Também efetua críticas de consistência e gera automaticamente malhas regulares de elementos. Chama RINCOM e ERRO.
- INREM - Executa as mesmas funções descritas para INDNOD e INEL, agora para os demais (REMainder) dados da estrutura: condições de contorno, ângulos para impressão de resultados, etc. Chama RINCOM e ERRO.
- LDADOS - Imprime, a critério do usuário, um relatório descritivo com os dados da estrutura obtidos pelas quatro subrotinas anteriores.

2º Módulo - Entrada de Dados de Carregamento e Montagem dos Vetores de Cargas Nodais Equivalentes

- CARREG - Controla a entrada de dados para os diversos casos de carregamento; efetua críticas de consistência. Cha-

ma as sub-rotinas RINCOM, ERRO, CONCPN, CONCCN, SUPERA, SUPERT. Imprime um relatório descritivo com os dados de carregamento.

- CONCPN - Interpreta e critica os comandos que definem as cargas CONcentradas sobe Pontos Nodais, atribuindo - as às variáveis correspondentes na memória principal. Soma as contribuições destas cargas no vetor de cargas nodais equivalentes. Efetua crítica sintática e de consistência. Chama as sub-rotinas RINCOM e ERRO.
- CONCCN - Executa as mesmas funções descritas para CONCPN, agora para as cargas CONcentradas sobre Círculos Nodais. Chama as sub-rotinas RINCOM e ERRO.
- SUPERA - Interpreta e critica os comandos que definem as ordenadas de cargas distribuídas sobre a SUPERfície de elementos Axissimétricos, atribuindo-as às variáveis correspondentes na memória principal. Calcula as cargas nodais equivalentes a este carregamento distribuído, e soma-as sobre o vetor apropriado. Efetua crítica sintática e de consistência. Chama as sub-rotinas RINCOM e ERRO:
- SUPERT - Executa as mesmas funções descritas para SUPERA, agora para as ordenadas de cargas distribuídas sobre a SUPERfície de elementos Tridimensionais (gerais e de transição). Chama as sub-rotinas RINCOM e ERRO.

3º Módulo - Montagem da Matriz de Rigidez Global K

- FORMAK - Efetua a montagem (FORMA) e armazenamento dos blocos da matriz de rigidez global K' , a partir das contribuições da matriz de rigidez dos elementos. Chama as

sub-rotinas PERFIL, ELAXIS, ELTRID, CONTOR e IO.

- PERFIL - Calcula os parâmetros e os vetores apontadores necessários para a descrição da topologia do armazenamento da matriz de rigidez global \underline{K} (veja-se item IV.5). Efetua ainda críticas de consistência sobre os dados da malha de elementos finitos. Chama a sub-rotina ERRO.
- ELAXIS - Calcula a matriz de rigidez de um ELEMENTO AXISSIMÉtrico como o descrito no capítulo II (expressão (II.32)). O produto $\underline{B}'^t \underline{D}' \underline{B}'$ é obtido explicitamente, tirando-se partido da relativa esparsidade destas matrizes, dadas pelas expressões (II.33), (II.35) e (II.61) Chama as sub-rotinas SHAPEA e INTER2
- ELTRID - Calcula o produto $\underline{B}'^t \underline{D}' \underline{B}'$ e efetua a integração da expressão (III.47), para a obtenção da matriz de rigidez de um ELEMENTO TRIDimensional (geral ou de transição). O produto intermediário $\underline{D}' \underline{B}'$ é obtido explicitamente, tirando-se partido da esparsidade da matriz \underline{D}' . A mesma sub-rotina é utilizada para os elementos gerais e de transição, já que a obtenção da matriz \underline{B}' de um elemento de casca geral (expressão (III.68)) é um caso particular dentro de \underline{B}' para um elemento de transição (expressão (III.49)). Chama as sub-rotinas COSDIR, FORMB e TMMULT.
- CONTOR - Introduz as condições de CONTORno em cada bloco da matriz de rigidez global \underline{K} , e nos termos correspondentes dos vetores de cargas nodais equivalentes \underline{P} .
- SHAPEA - Fornece o valor das funções de interpolação (SHAPE), e

de suas derivadas em relação à coordenada curvilínea ξ e nos pontos de Gauss sobre o elemento axissimétrico.

- INTER2 - Calcula a matriz jacobiana \underline{J} , seu determinante, sua inversa \underline{J}^{-1} , a matriz de transformação de coordenadas \underline{T} e o produto $\underline{T}^t \underline{J}^{-1}$, para o elemento axissimétrico (Veja-se o Apêndice A). Chama a sub-rotina ERRO se o determinante do jacobiano for nulo ou negativo.
- COSDIR - Calcula uma matriz de transformação de coordenadas \underline{T} ou \underline{T}_i definida por seus cossenos diretores \vec{v}_1 , \vec{v}_2 e \vec{v}_3 , a partir das componentes de um vetor \vec{V}_3 . Emprega as fórmulas (B.8) a (B.16) do Apêndice B.
- FORMB - Calcula a matriz \underline{B}' para um elemento geral ou de transição. Emprega as relações (III.49) ou (III.68),(III.65) e (III.66). Chama as subrotinas SHAPEP,SHAPEL,INTER1,COSDIR e ERRO.
- TMMULT - Sub-rotina chamada por ELTRID que efetua o produto de duas matrizes \underline{M}_1 e \underline{M}_2 , na forma $\underline{M}_1^t \underline{M}_2$. Utilizada para calcular o produto $\underline{B}'^t \underline{DB}$, onde \underline{DB} é o resultado da multiplicação das matrizes \underline{D}' \underline{B}' efetuada explicitamente em ELTRID. Como de modo geral as matrizes \underline{B}' e \underline{DB} são cheias, não há vantagem em calcular seu produto explicitamente.
- SHAPEP - Fornece o valor das funções de interpolação (SHAPE) correspondentes aos pontos nodais dos elementos gerais e de transição, bem como o valor de suas derivadas em relação às coordenadas curvilíneas ξ e η , sobre os pontos de Gauss. Emprega as expressões (III.2).
- SHAPEL - Idem, para as parcelas da função de interpolação correspondentes à linha nodal de elementos de transição. Emprega as expressões (III.16) a (III.18).

INTER1 - Executa as mesmas funções de INTER2, agora para os elementos geral e de transição. Veja-se o Apêndice B.

4º Módulo - Resolução do Sistema de Equações

CHOLES - Resolve um sistema de equações algébricas lineares empregando o Método de Cholesky. A matriz dos coeficientes deve ser simétrica e positiva definida, e seu perfil de colunas ativas (veja-se item IV.5) deve estar armazenado em um vetor de trabalho na memória principal ou em um arquivo 'BLOC' na memória auxiliar. Em caso de utilização de memória auxiliar, necessitam-se que estejam presentes na memória central apenas dois blocos de cada vez. Chama a sub-rotina IO.

5º Módulo - Saída de Resultados

OUTDES - Aplica os coeficientes de Fourier sobre cada harmônico dos resultados sobre os círculos nodais, e soma estes harmônicos para os valores requeridos da coordenada angular θ . Imprime seletivamente estes resultados e os obtidos anteriormente.

6º Módulo - Cálculo de Tensões

TENS - Gerencia o cálculo e impressão das tensões sobre os nós dos elementos, chamando as subrotinas TENSELT e TENLAX para os elementos tridimensionais e axissimétricos respectivamente. As tensões expressas no sistema local de coordenadas, são calculadas através da expressão $\underline{\sigma}^e = \underline{D} \underline{B} \underline{U}^e$, diretamente sobre os nós dos elementos; podem, a critério do usuário, ser transportadas para o sistema global. Deve-se ressaltar que a melhor locação para o cálculo das tensões é sobre os pontos de integração (COOK⁹), extrapolando-se para os nós dos elementos através da técnica citada.

V.4 - A Linguagem do Sistema CRIL0

Apresenta-se a seguir um sumário das características e da utilização da linguagem do sistema. Este item não pretende se constituir em um manual de referência propriamente dito, mas sim ilustrar a filosofia e a estrutura geral da linguagem, dando ênfase às facilidades disponíveis para a descrição do modelo estrutural elaborado pelo engenheiro.

V.4.1 - Estruturação da Linguagem

A linguagem foi estruturada em grupos de "comandos". Os elementos básicos que compõem os comandos são: números reais, números inteiros, palavras-chave, identificadores de opção e rótulos de dados. Estes elementos estão contidos em "campos" delimitados por um ou mais caracteres brancos; assim, é óbvio que um campo não pode conter nenhum branco. Os campos podem ser de dois tipos:

a) Campos numéricos, representando os números reais ou inteiros. São compostos por uma sequência de dígitos numéricos, com ou sem sinal negativo; os números reais distinguem-se dos inteiros por possuírem um ponto para separar a parte inteira da parte decimal, mesmo que uma ou outra parte não apareçam.

b) Campos alfanuméricos, representando as palavras-chave, identificadores de opção e rótulos de dados. Estes elementos serão vistos na descrição dos comandos, apresentada no sub-item seguinte. São compostos por uma sequência de caracteres EBCDIC, excetuando-se os caracteres ; \$ e %. O primeiro caracter do campo não pode ser um dígito numérico, um ponto decimal ou sinal - . As sequências de caracteres consi-

deradas válidas para a composição da linguagem estão contidas em uma tabela definida em um comando DATA no programa principal, e só se consideram significativos os quatro primeiros caracteres. Assim, COORDENADAS e COORDADA, por exemplo, são campos válidos, ao contrário de CORDENADAS:

A disposição dos comandos em relação aos registros físicos do arquivo de entrada de dados segue uma filosofia semelhante à empregada no sistema LORANE (é bom lembrar que o conceito de "registro físico" engloba tanto cartões perfurados quanto registros de 80 caracteres em disco ou fita magnética). Assim, salvo indicação em contrário, um registro físico corresponde a um comando, e os campos deste comando podem ocupar qualquer posição dentro do registro. O símbolo; (ponto e vírgula) funciona como delimitador de comandos, permitindo agrupar dois ou mais comandos dentro de um registro. O símbolo \$ serve para indicar que a continuação de um comando encontra-se no próximo registro, permitindo que um comando se estenda por dois ou mais registros. Os campos de um registro que se seguem ao símbolo % não serão interpretados e podem ser utilizados como comentários.

De um modo geral, os comandos da linguagem estão associados a sub-conjuntos ou grupos de comandos. Cada um destes grupos corresponde a um tipo de informação ou dado, necessário para orientar o sistema na definição e resolução do modelo estrutural elaborado pelo usuário. Assim, um grupo pode ser constituído por uma sequência de comandos formando uma tabela, identificada por um "comando-cabeçalho": é o caso, por exemplo, do grupo de comandos que definem a incidência dos elementos. Alternativamente, um grupo pode ser composto por apenas

um comando individual; é o caso do comando OPCOES ou do comando FIM.

Além disso, considera-se também a existência de dois sub-conjuntos mais amplos, os blocos de comandos: o primeiro define basicamente os dados gerais e da estrutura, e o segundo define os dados de carregamento. Os grupos de comandos correspondentes ao primeiro bloco são identificados pelo sistema através das seguintes palavras-chave, contidas nos respectivos comandos-cabeçalho:

OPCOes
 NUMero
 CONStantes
 DADOS
 COORdenadas
 INCIdencia
 INCIdencia LINHas
 CONDicoes
 COEFicientes
 ANGUlos
 FIM

As palavras-chave utilizadas para identificar os grupos de comandos correspondentes ao segundo bloco são:

CARRegamento
 PONTos
 CIRCulos
 AXISsimetricos
 TRIDimensionais
 PESO

O primeiro registro do arquivo de entrada é o único

que não é interpretado pelo sistema; constitui-se num título , que será impresso como cabeçalho da listagem do espelho dos comandos lidos, do relatório descritivo dos dados gerais e da estrutura, e dos resultados para cada caso de carregamento. O último registro do arquivo de entrada deve conter uma das seguintes palavras-chave:

FIM

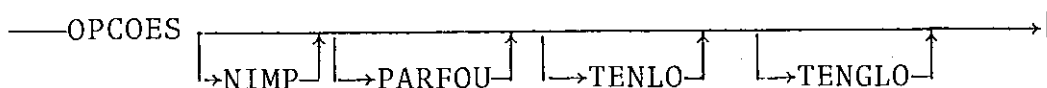
ANALise

Se for utilizada a palavra FIM, o sistema assumirá que se desejava apenas verificar a sintaxe dos comandos e a consistência dos dados de entrada, e o processamento será concluído ao fim do segundo módulo. A análise da estrutura só será efetuada se não forem detectados erros de sintaxe e consistência do modelo, e se for utilizada a palavra-chave ANALise.

V.4.2 - Descrição dos Comandos

A seguir apresenta-se a descrição dos grupos de comandos da linguagem, na forma em que estão implementados na versão corrente do sistema CRILO. Para a definição da sintaxe destes comandos serão utilizados alguns recursos de notação Backus-Naur, que é familiar aos usuários de linguagens orientadas ao problema. As palavras-chave, rótulos de dados e identificadores de opção são apresentadas, literalmente, em letras maiúsculas; os números inteiros são representados pela letra i (i_1, i_2 , etc) e os números reais pela letra r (r_1, r_2 , etc.).

1 - O primeiro grupo é composto pelo comando individual OPCOES (opcional):



Este comando define algumas opções de processamento e impressão de resultados. Os identificadores de opção NIMP, PARFOU, TENLO e TENGLO têm os seguintes significados:

- NIMP indica que o relatório descritivo dos dados gerais e da estrutura não deve ser impresso. É útil quando já se tem certeza que o modelo estrutural está correto, e permite a impressão apenas da listagem dos comandos e dos resultados.

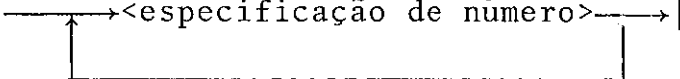
- PARFOU causa a impressão dos resultados para cada harmônico (PARcela) da série de FOURier sobre os círculos nodais.

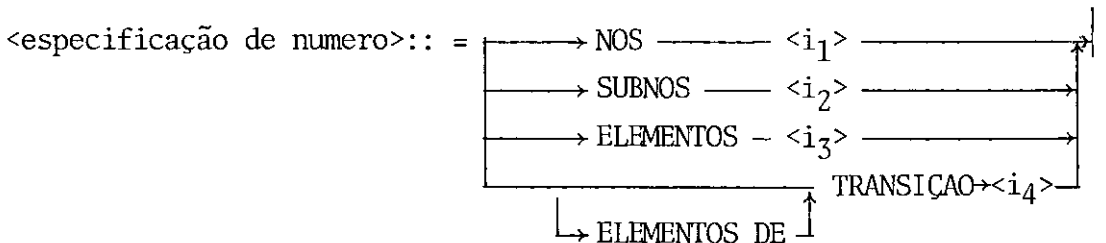
- TENLO indica qua as tensões, referenciadas no sistema local de coordenadas, devem ser calculadas e impressas.

- TENGLO idem, para as tensões referenciadas no sistema global.

Este comando pode ser omitido, se nenhuma das opções acima for adotada.

2 - Grupo de comandos NUMERO (obrigatório)

2.1 - NUMERO DE  <especificação de número>



<i₁>:: = {número total de nós, computando-se os círculos e pontos nodais}

<i₂>:: = {número total de elementos}

<i₃>:: = {número de sub-nós, computando-se apenas os sub-

nós 6 e 7 dos elementos de transição: o "nó móvel" não é considerado, veja-se o capítulo III}

$\langle i_4 \rangle ::= \{\text{número de elementos de transição}\}$

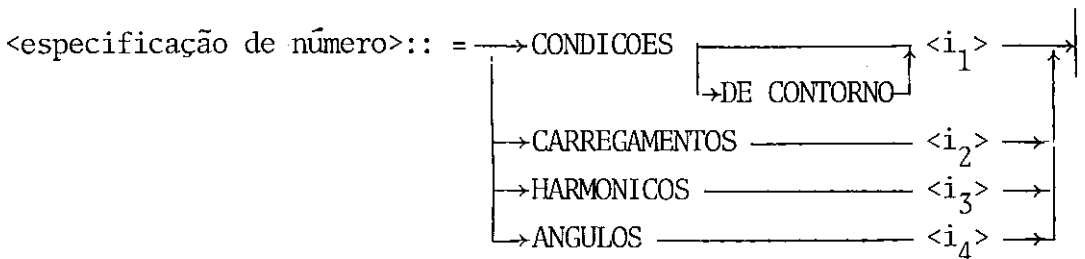
Este comando fornece parâmetros utilizados para testes de consistência de dados e dimensionamento dos vetores de trabalho.

Exemplo:

NUMERO DE NOS 93 ELEMENTOS 48 % MODELO TRIDIM. OU AXISSIMETRICO
 NUMERO DE NOS 112 SUBNOS 19 \$

ELEMENTOS 59 TRANSICAO 18 % MODELO QUASI+AXISSIMETRICO

2.2 - O segundo comando NUMERO (obrigatório) tem a mesma forma do primeiro, agora com:



$\langle i_1 \rangle ::= \{\text{número de nós que possuem condições de contorno em termos de deslocamentos prescritos}\}$

$\langle i_2 \rangle ::= \{\text{número de casos de carregamento; vale 1 se omitido}\}$

$\langle i_3 \rangle ::= \{\text{número de harmônicos de Fourier considerados na análise dos modelos axissimétrico e quasi axissimétrico; vale 1 se omitido}\}$

$\langle i_4 \rangle ::= \{\text{número de valores da coordenada angular } \theta \text{ considerados para processamento e impressão dos resultados sobre círculos nodais; vale 1 se omitido}\}$

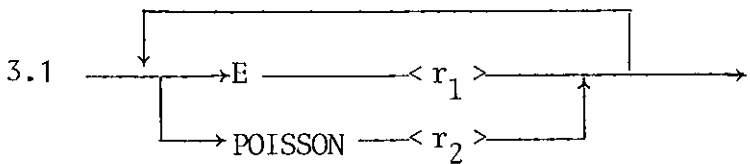
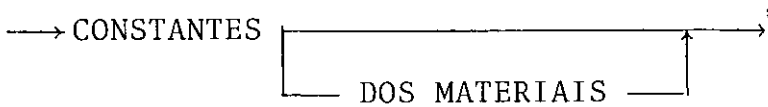
Exemplos:

NUMERO DE CONDICÕES 12

NUMERO DE CARREGAMENTOS 5 CONDICÕES DE CONTORNO 18 \$

HARMONICOS 7 ANGULOS 4

- 3 - Grupo de comandos para a definição das propriedades mecânicas do material (obrigatório). Inicia-se com o Comando-Cabeçalho CONSTANTES:



$\langle r_1 \rangle :: = \{\text{valor do módulo de deformação longitudinal}\}$

$\langle r_2 \rangle :: = \{\text{valor do coeficiente de Poisson}\}$

Exemplos:

E 10500. POISSON .3125

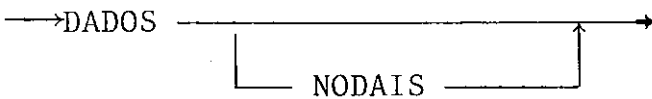
E 9100. % O COEFICIENTE DE POISSON E' NULO

E 2.. POISSON .3 E 1000000. % ASSUME E = 1000000.

Este comando será alterado posteriormente para permitir a definição de mais de um tipo de material por estrutura.

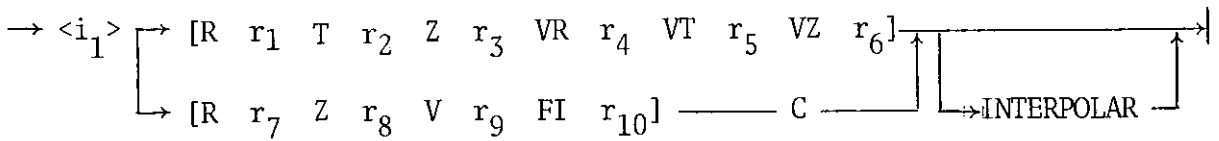
- 4 - Grupo de comandos para a definição dos dados dos nós (obrigatório).

Inicia-se com o comando-cabeçalho



Os comandos a seguir formam a tabela de dados nodais: coordenadas e componentes do vetor espessura, expressos no sistema cilíndrico global. A inicialização (zeragem) das variáveis correspondentes a estes dados é efetuada logo após a introdução do comando cabeçalho.

4.1 - Comando para definição dos dados de um nó:



$\langle i_1 \rangle :: = \{\text{número do nó, de acordo com a numeração estabelecida pelo usuário (veja-se o item IV.4)}\}$

Se o nó i_1 for um ponto nodal, os seguintes valores podem ser especificados:

$\langle r_1 \rangle :: = \{\text{valor da coordenada } r_{i_1}\}$

$\langle r_2 \rangle :: = \{\text{valor da coordenada angular } \theta_{i_1} \text{ em graus}\}$

$\langle r_3 \rangle :: = \{\text{valor da coordenada } z_{i_1}\}$

$\langle r_4 \rangle :: = \{\text{valor da componente do vetor espessura } \vec{V}_{3i_1} \text{ na direção radial}\}$

$\langle r_5 \rangle :: = \{\text{valor da componente do vetor espessura } \vec{V}_{3i_1} \text{ na direção circunferencial}\}$

$\langle r_6 \rangle :: = \{\text{valor da componente do vetor espessura } \vec{V}_{3i_1} \text{ na direção } z\}$

Os rótulos de dados correspondentes a estes valores são, respectivamente, R, T, Z, VR, VT, VZ,. Se o nó i_1 for um

círculo nodal, os seguintes valores podem ser especificados:

$$\begin{aligned} \langle r_7 \rangle &:: = \{ \text{valor da coordenada } r_{i_1} \} \\ \langle r_8 \rangle &:: = \{ \text{valor da coordenada } z_{i_1} \} \\ \langle r_9 \rangle &:: = \{ \text{valor da espessura } t_{i_1} \} \\ \langle r_{10} \rangle &:: = \{ \text{valor do ângulo } \theta_{i_1} \text{ (veja-se item II.1)} \} \end{aligned}$$

Os rótulos dados correspondentes a estes valores são, respectivamente R, Z, V, FI.

Aqui abre-se um parêntese para esclarecer que os pares rótulo de dado-valor real que aparecem entre colchetes em um diagrama de sintaxe devem ser fornecidos de acordo com as regras a seguir:

- Os rótulos podem ser todos omitidos, e neste caso os valores devem ser especificados na ordem em que aparecem no diagrama de sintaxe.

- A utilização de um rótulo precedendo um valor implica, necessariamente, na utilização dos rótulos correspondentes aos demais valores especificados. Os pares rótulo-valor assim especificados podem aparecer em qualquer ordem.

- Um ou mais pares rótulo-valor podem ser omitidos. Esta omissão não acarreta a zeragem das variáveis correspondentes na memória; ocorre apenas que nenhum valor será atribuído a estas variáveis, de modo que prevalece o valor que houver sido atribuído anteriormente, na inicialização efetuada pelo comando cabeçalho correspondente ou em algum outro comando do mesmo grupo.

Para exemplificar, supõe-se que se deseja especificar os seguintes valores para os dados de um ponto nodal, de nú

mero 1: $r_1=10.$, $r_2=0.$, $r_3=2.$, $r_4=.5$, $r_5 = 0.$, $r_6 = .5$. Pa
ra isto, pode-se empregar qualquer um dos comandos que seguem o
cabeçalho DADOS NODAIS;

DADOS NODAIS

1 R 10. Z 2. VR .5 VZ .5

1 10. 0. 2. .5 0. .5

1 R 10. Z 2. T 0. VR .5 VZ .5 VT 0.

Observa-se que as duas últimas formas efetivamente
atribuem o valor zero às variáveis correspondentes a r_2 e r_5 . E
xistem outras formas igualmente válidas; por outro lado, as se
guintes construções são incorretas:

1 R 10. T Z 2. VR .5 VT VZ .5

1 10. Z 2. .5 VZ .5

O comando

1 10. 2. .5 .5

é válido, mas atribui os seguintes valores para os dados do pon-
to nodal 1: $r_1 = 10.$, $r_2 = 2.$, $r_3 = .5$, $r_4 = .5$. Nenhum va-
lor será atribuído aos dados correspondentes a r_5 e r_6 .

No diagrama de sintaxe apresentado, a palavra-chave
C serve para indicar que o nó considerado é um círculo nodal. Por
exemplo, os comandos a seguir

1 R 100. Z 25.

2 100. 45. 5. 5.

definem, respectivamente, r_1 e r_3 para o ponto nodal 1, e r_1 a r_4
para o ponto nodal 2. Se não existisse a palavra-chave C no dia-
grama de sintaxe, os comandos acima seriam ambíguos, já que pode-
riam definir também, respectivamente, r_7 e r_8 para o círculo no-
dal 1, e r_7 a r_{10} para o círculo nodal 2.

A palavra-chave INTERPOLAR indica que os nós omitidos entre dois comandos deste tipo devem ter seus dados gerados automaticamente por interpolação linear. Esta opção só poderá ser utilizada se ambos os comandos definirem o mesmo tipo de nó (ponto nodal ou círculo nodal). Por exemplo, os comandos

```
1 R 10. T 90. VR .5 VZ .5
```

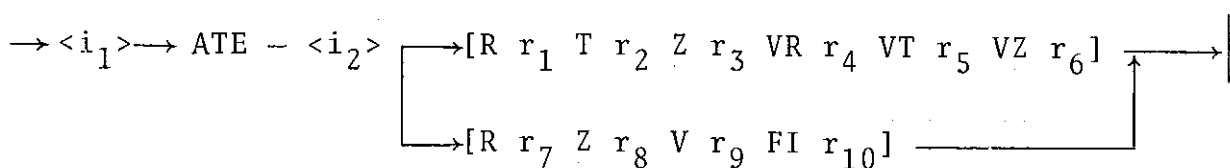
```
3 10. 80. 2. .5 0. .5 INTERPOLAR
```

correspondem à seguinte tabela de dados nodais:

ponto nodal	r ₁	r ₂	r ₃	r ₄	r ₅	r ₆
1	10.	90.	0.	.5	0.	.5
2	10.	85.	1.	.5	0.	.5
3	10	80.	2.	.5	0.	.5

Os comandos deste tipo não necessitam ser introduzidos seguindo-se a ordem crescente de numeração de nós (embora este procedimento seja o mais conveniente, para facilitar o entendimento). Apenas no caso de utilizar-se a opção INTERPOLAR, exige-se a observação de uma ordem de precedência entre comandos deste tipo.

4.2 - Comando para a definição dos dados comuns a uma lista de nós



Exemplo:

```
1 ATE 10 V 1. FI 10.
```

Este comando indica que todos os círculos nodais nu merados de 1 a 10 possuem a mesma espessura (igual a 1.) e o mesu

mo ângulo ϕ (10^0). Estes nós devem ter suas coordenadas definidas por comandos do tipo 4.1 utilizando-se a palavra-chave C; nestes comandos os dados já definidos (V, FI) serão omitidos.

A Figura V.2 representa uma estrutura discretizada com uma malha de 25 elementos e 96 nós, e servirá para ilustrar a utilização dos comandos apresentados a seguir.

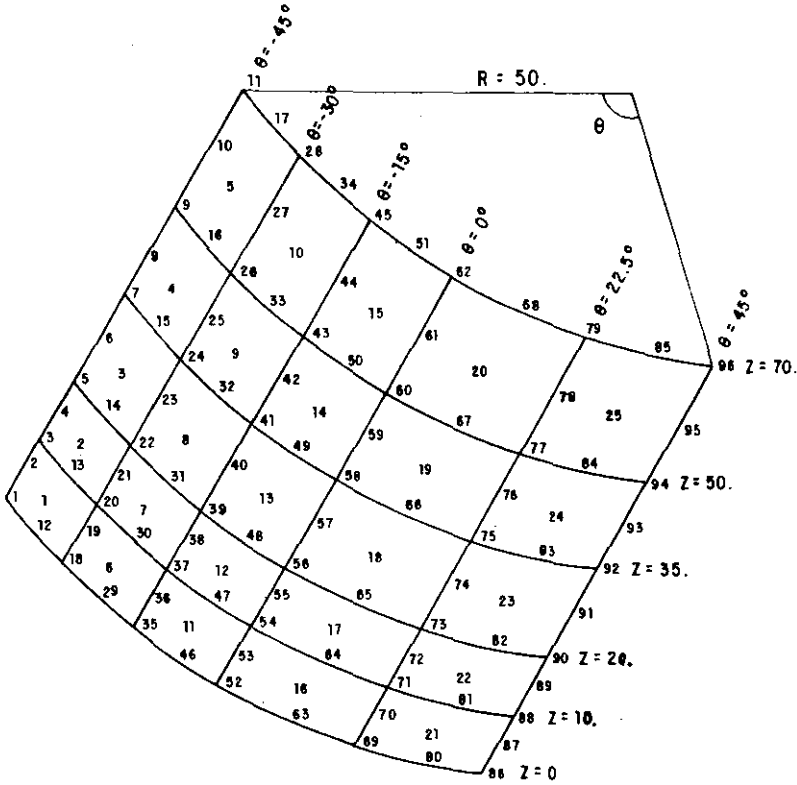
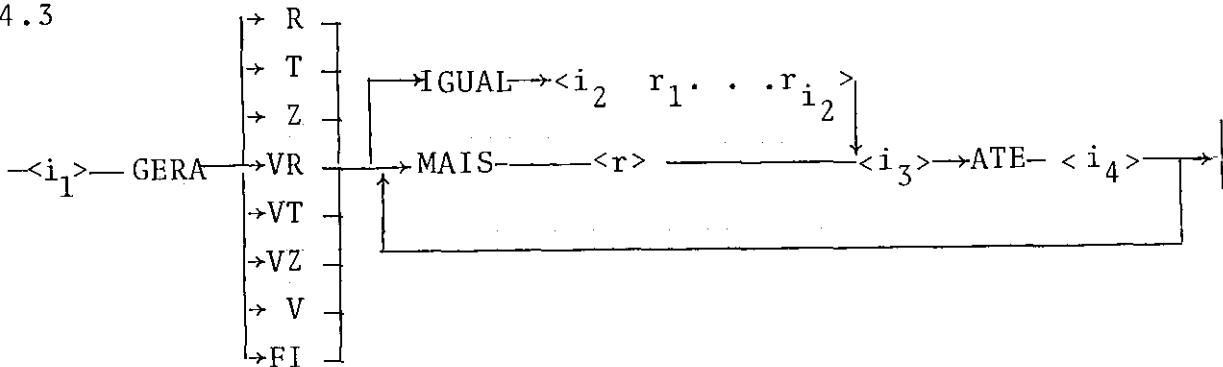


Figura V.2

4.3



A partir dos dados definidos anteriormente através de comandos dos tipos 4.1, 4.2 ou 4.4 para o nó i_1 , gera automaticamente os dados da lista de nós definida pelos valores inteiros i_3 e i_4 . Esta lista é composta por nós que possuem dados semelhantes, com a exceção indicada pelo rótulo de dados correspondente (R, T, etc.). Este comando pode ser usado para definir uma lista de pontos nodais ou uma lista de círculos nodais; no entanto, uma mensagem de erro será emitida se a lista possuir pontos e círculos nodais.

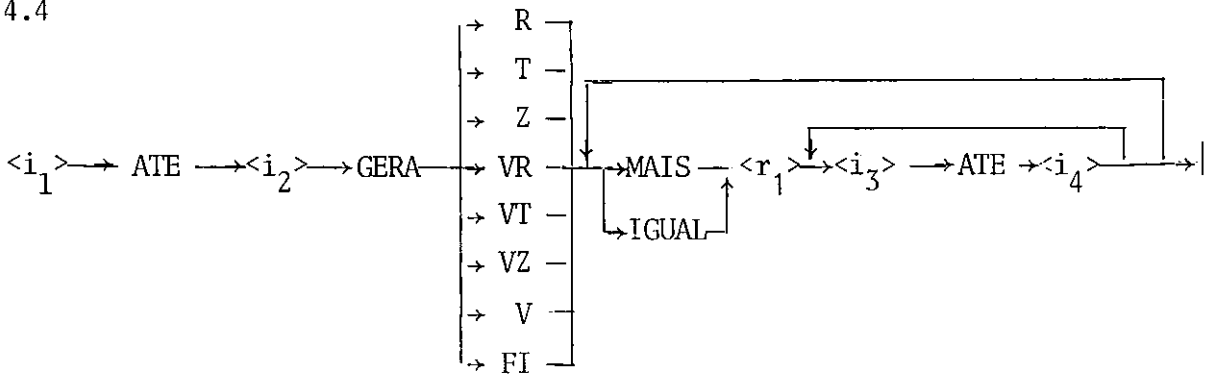
A atribuição dos valores dos dados nodais é feita da seguinte forma:

- Os dados semelhantes serão atribuídos a cada um dos nós da lista;
- Os dados indicados pelo rótulo correspondente serão alterados e atribuídos aos nós da lista, de acordo com a opção utilizada. A opção IGUAL atribui os i_2 valores r_1 a r_{i_2} , respectivamente aos nós i_3 a i_4 . Mensagens de erro serão emitidas se i_2 não for igual ao número de nós da lista, ou se não forem fornecidos exatamente i_2 valores reais. A opção MAIS atribui os dados alterados incrementando, sucessivamente, pelo valor r , o valor do dado correspondente no nó i_1 . Esta opção permite dividir a lista de nós em várias listas, cada uma com um valor diferente para o incremento r .

Exemplos que esclarecem a utilização deste comando serão apresentados após a introdução do próximo comando de gera

ção automática de dados nodais.

4.4



A partir dos dados definidos anteriormente através de comandos do tipo 4.1, 4.2 ou 4.3 para os nós da lista-base i_1 até i_2 , gera automaticamente os dados de várias listas de nós de de finidas por valores inteiros i_3 e i_4 . Estas listas são compos - tas por nós que possuem dados "respectivamente" semelhantes, com a exceção indicada pelo rótulo de dados correspondente (R,T,etc). Em outras palavras, o primeiro nó de cada lista a ser gerada possui dados semelhantes aos do primeiro nó da lista base, e assim sucessivamente.

A atribuição dos valores dos dados nodais é feita da seguinte forma:

- Os dados semelhantes serão atribuídos aos nós das listas geradas, em correspondência aos nós da lista de base.
- Os dados indicados pelo rótulo correspondente se r ão alterados e atribuídos aos nós das listas ge r radas, de acordo com a opção utilizada. A opção IGUAL atribui o valor r_1 a todos os nós das lis - tas; a opção MAIS incrementa de r_1 os valores dos dados correspondentes nos nós da lista-base, atribuindo-os aos nós das listas geradas.

Para exemplificar a utilização destes comandos, apresenta-se a seguir a definição dos dados dos nós da malha da Figura V.2:

DADOS NODAIS

```
1 ATE 96 R 50. VR. 1
1 T -45.
1 GERA Z MAIS 5. 2 ATE 5 MAIS 7.5 6 ATE 9 MAIS 10. 10 ATE 11
12 ATE 17 T -37.5
12 Z 0.; 14 Z 20. INTER; 16 Z 50. INTER; 17 Z 70.
1 ATE 11 GERA T MAIS 15. 18 ATE 28 35 ATE 45 52 ATE 62 $
      MAIS 22.5 69 ATE 79 86 ATE 96
12 ATE 17 GERA T MAIS 15. 29 ATE 34 46 ATE 51 $
      MAIS 18.75 63 ATE 68 MAIS 22.5 80 ATE 85
```

5 - Grupo de comandos para definição dos dados dos sub-nós (obrigatório para o modelo quasi-axissimétrico). Inicia-se com o comando cabeçalho



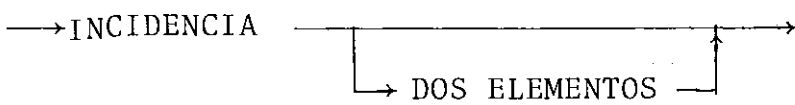
Os comandos do grupo 4 definem os dados dos nós propriamente ditos, ou seja, pontos nodais e círculos nodais (veja-se o capítulo III). Os sub-nós 6 e 7 que definem a linha nodal de um elemento de transição devem ter suas coordenadas angulares θ definidas à parte; as coordenadas R e Z e as componentes do vetor espessura são obtidos internamente pelo programa, a partir dos dados fornecidos para o círculo nodal que abrange esta linha nodal.

5.1 $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow \langle r_1 \rangle \longrightarrow$

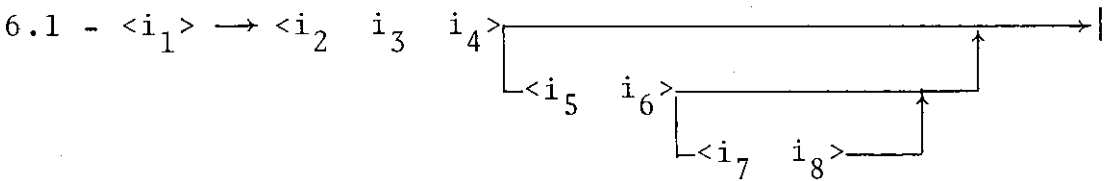
$\langle i_1 \rangle :: = \{\text{número do sub-nó}\}$

$\langle r_1 \rangle :: = \{\text{valor da coordenada angular } \theta \text{ em graus}\}$

6 - Grupo de comandos para a definição dos dados dos elementos (obrigatório). Inicia-se com o comando-cabeçalho



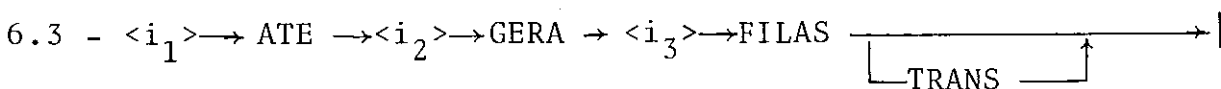
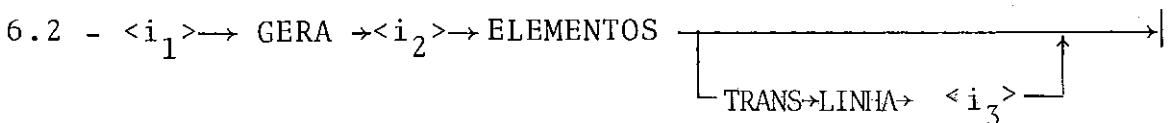
Os comandos a seguir fornecem a tabela de incidência dos elementos. A inicialização das variáveis correspondentes na memória principal é efetuada logo após a introdução do comando-cabeçalho. Os elementos devem ser numerados sequentialmente; nesta numeração podem-se intercalar elementos gerais, axissimétricos ou de transição.



Serve para definir a incidência do elemento i_1 . i_i indicam os nós conectados a este elemento.

Exemplos:

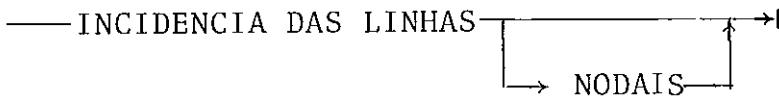
```
1  1  2  3  % DEFINE UM ELEMENTO AXISSIMETRICO
2 34 33 38 42 43 48 % DEFINE UM ELEMENTO DE TRANSICAO
3  6 12 11 10  7  3  2  1 % DEFINE UM ELEMENTO GERAL
```



Comandos para geração automática de malhas regulares de elementos. Por exemplo, os comandos a seguir geram a incidência dos elementos da malha da Figura V.2:

```
1 12 18 19 20 13 3 2 1 ; 1 GERA 4 ELEMENTOS
                             1 ATE 5 GERA 4 FILAS
```

7 - Grupo de comandos para a definição da incidência de linhas nodais (obrigatório para o modelo quasi-axissimétrico). Inicia-se com o comando-cabeçalho



Foi visto, no capítulo III, que a cada sub-nó de um elemento de transição não corresponde um conjunto de graus de liberdade independentes. A definição da incidência de um elemento de transição é feita da forma indicada pelo exemplo apresentado para o comando 6.1, ou seja, indicando-se (pela ordem) o número dos cinco pontos nodais e o número do círculo nodal que abrange a linha nodal deste elemento. Para a definição completa de sua geometria, no entanto, deve-se ainda indicar a incidência da linha nodal, através do grupo de comandos aqui apresentado.

7.1 - $\langle i_1 \rangle \longrightarrow \langle i_2 \quad i_3 \rangle \longrightarrow$

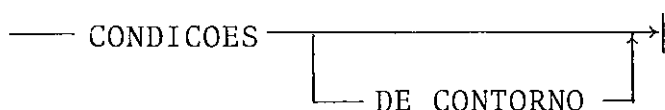
i_1 indica a ordem do elemento de transição correspondente à linha nodal considerada; para a definição desta incidência, os elementos de transição devem ser numerados pelo usuário, de 1 até o número total, seguindo-se a mesma ordem em

que estes elementos aparecem dentro da lista global de elementos, definidas pelos comandos do grupo 6. i_2 e i_3 indicam o número dos sub-nós 6 e 7, como definido nos comandos do grupo 5.

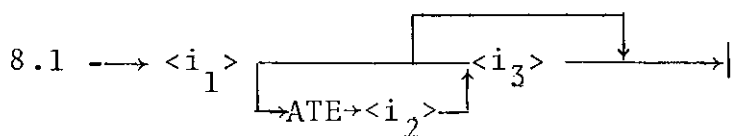
7.2 - $\langle i_1 \rangle \longrightarrow \text{GERA} \longrightarrow \langle i_2 \rangle \longrightarrow$

Gera automaticamente, a partir da incidência da linha nodal i_1 , a incidência das linhas nodais adjacentes situadas sobre o mesmo círculo nodal.

8 - Grupo de comandos para a definição das condições de contorno (obrigatório). Inicia-se com o comando cabeçalho



As condições de contorno para cada nó da estrutura são expressas por um código numérico de cinco dígitos, correspondente aos cinco graus de liberdade por nó (veja-se as expressões (II.24) e (III.36)). Para indicar que o grau de liberdade correspondente é restringido, usa-se o dígito 1: em caso contrário, utiliza-se o dígito 0.

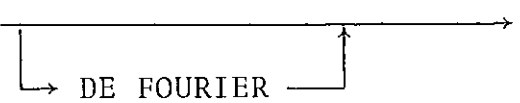

$$\langle i_1 \rangle :: = \{\text{número do nó restringido}\}$$
$$\langle i_3 \rangle ::= \{ \text{código formado por dígitos 0 ou 1} \}$$

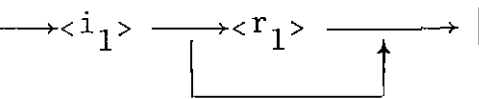
Pode-se especificar uma lista de nós que possuem as mesmas condições de contorno, através da palavra-chave ATE. Por exemplo, os comandos

1 ATE 3 1001 ; 12 ; 15 ; 18

indicam que os nós 1, 2, 3, 12, 15 e 18 estão associados ao mesmo código de condição de contorno - 1001, que indica que o segundo e o quinto graus de liberdade deste nó estão restringidos.

9 - Grupo de comandos para a definição dos coeficientes de Fourier (opcional, para os modelos axissimétrico e quasi-axissimétrico). Inicia-se com o comando-cabeçalho

COEFICIENTES 

9.1 -  $\rightarrow \langle i_1 \rangle \rightarrow \langle r_1 \rangle \rightarrow |$

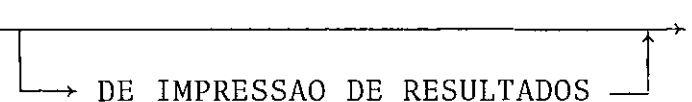
$\langle i_1 \rangle :: = \{\text{ordem do harmônico}\}$

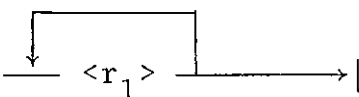
$\langle r_1 \rangle :: = \{\text{respectivo coeficiente. Se não for especificado, assume } r_1 = 1\}$

Os harmônicos não especificados por comandos deste tipo terão coeficientes nulos.

10. - Grupo de comandos para a definição dos ângulos θ para impressão de resultados (opcional, modelos axissimétrico e quasi-axissimétrico).

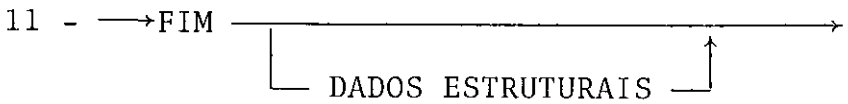
Inicia-se com o cabeçalho

ANGULOS 

10.1 -  $\rightarrow \langle r_1 \rangle \rightarrow |$

Este comando consiste apenas na enumeração das coord

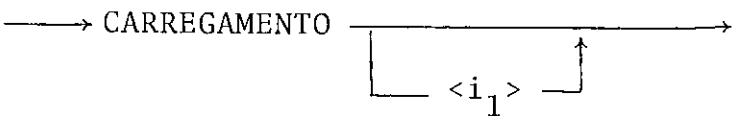
denadas angulares θ que definem os pontos sobre os círculos no
dais aonde se desejam obter os resultados.



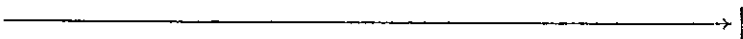
Indica que não há mais dados da estrutura a serem
lidos.

Os grupos de comandos 1 a 11 constituem o bloco
que define os dados gerais e da estrutura, e devem ser introdu-
zidos na ordem em que foram aqui apresentados. A seguir será
descrito o bloco que define os dados de carregamento.

A entrada de dados para cada caso de carregamento
deve ser iniciada através do comando-cabeçalho

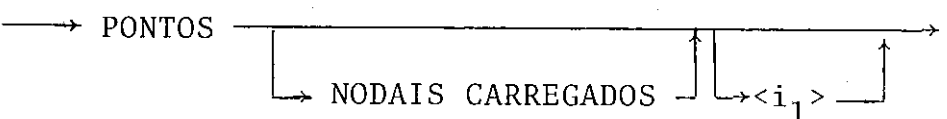


e deve ser encerrada por um comando em branco, indicado aqui
por



Os grupos de comandos que definem o tipo de solici-
tação podem aparecer, em qualquer ordem, entre os comandos espe-
cificados acima. São os seguintes:

1 - Grupo de comandos para a definição de cargas sobre pontos no
dais. Iniciam-se com o comando-cabeçalho:



$\langle i_1 \rangle$ indica o número de pontos nodais carregados; sua definição não é obrigatória, e serve como um 'check' de consistência de dados.

1.1 - $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow \langle r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ r_5 \rangle \longrightarrow |$

Define as cargas nodais sobre o ponto nodal de número i_1 ; r_1 a r_5 são as cargas correspondentes a cada grau de liberdade.

2 - Grupo de comandos para a definição de cargas sobre círculos nodais. Inicia-se com o comando cabeçalho:

$\longrightarrow \text{CIRCULOS} \xrightarrow{\hspace{10em}} |$
 $\hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}} \text{NODAIS CARREGADOS} \xrightarrow{\hspace{10em}} |$
 $\hspace{10em} \xrightarrow{\hspace{10em}} \langle i_1 \rangle \xrightarrow{\hspace{10em}} |$

Semelhante ao descrito em 1. Para círculos nodais, deve-se definir as cargas correspondentes a cada harmônico considerado no desenvolvimento em série de Fourier para a direção circunferencial. Assim, seguem-se grupos de comandos para cada harmônico, indicados pelo comando cabeçalho:

2.1 - $\longrightarrow \text{HARMONICO} \longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow |$

Aquí o inteiro i_1 é obrigatório, e deve indicar a ordem do harmônico considerado. O sistema verificará se este harmônico foi associado, no grupo de comandos COEFICIENTES, a um coeficiente não nulo.

O comando 2.1 deve ser omitido se, em um modelo axisimétrico, não for efetuado o desenvolvimento em série de Fourier

para a direção circunferencial (quando as cargas também são axissimétricas).

O comando que define os valores das cargas para um harmônico sobre um círculo nodal é semelhante ao descrito em 1.1:

2.1.1 - $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow \langle r_1 \dots r_5 \rangle \longrightarrow |$

3 - Grupo de comandos para a definição das ordenadas de cargas sobre a superfície de elementos axissimétricos. Inicia-se com o comando cabeçalho:

\longrightarrow ELEMENTOS \longrightarrow AXISSIMETRICOS \longrightarrow CARREGADOS $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow |$

O inteiro i_1 novamente permite um 'check' opcional de consistência de dados; deve indicar o número de elementos axissimétricos carregados.

Os grupos de comandos para cada harmônico são novamente definidos pelo comando-cabeçalho:

3.1 - \longrightarrow HARMONICO $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow |$

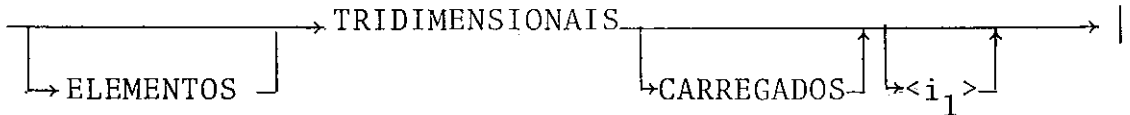
semelhante ao apresentado em 2.1.

Os comandos que definem as ordenadas do carregamento distribuído são

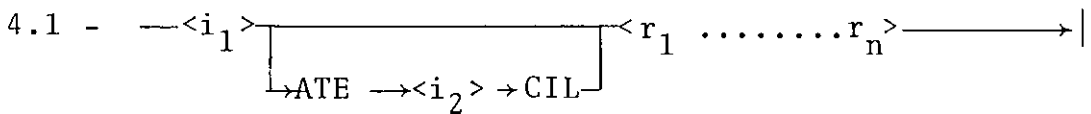
3.1.1 - $\longrightarrow \langle i_1 \rangle \longrightarrow$ \longrightarrow ATE $\longrightarrow \langle i_2 \rangle \longrightarrow$ LOCAL $\longrightarrow \langle r_1 \dots r_9 \rangle \longrightarrow |$

onde i_1 indica o número do elemento carregado; r_1 a r_9 são as ordenadas de carga sobre as três direções globais, correspondentes a cada um dos três nós do elemento axissimétrico. O identificador de opção LOCAL indica que as cargas estarão orientadas segundo o sistema local de referência (veja-se Capítulo II).

4 - Grupo de comandos para a definição das ordenadas de cargas de superfície sobre elementos tridimensionais. Inicia-se com o comando cabeçalho:



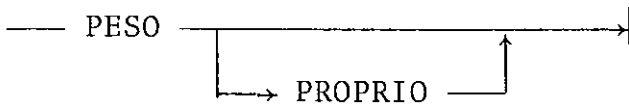
É semelhante ao descrito para o grupo 3.



$\langle i_1 \rangle$ indica o número do elemento carregado; r_1 a r_n representam as ordenadas de cargas superficiais sobre os pontos nodais de elementos gerais e de transição, e as ordenadas correspondentes a cada harmônico sobre o círculo nodal do elemento de transição. Deve-se obedecer a ordem especificada na definição da incidência deste elemento.

A palavra-chave ATE permite a entrada de um grupo de ordenadas comuns a uma lista de elementos; esta opção, associada ao identificador CIL (que indica que as coordenadas estão referenciadas ao sistema cilíndrico global), pode ser muito conveniente na definição deste tipo de carregamento.

5 - Grupo de comandos para a definição de forças de massa. Ini
cia-se com o cabeçalho:



5.1 - $\rightarrow \langle r_1 \quad r_2 \quad r_3 \rangle$ \longrightarrow

Este comando contém apenas as componentes do vetor de forças de massa segundo as três direções cartesianas globais. Para os modelos axissimétrico e quasi-axissimétrico, deve-se ter necessariamente $r_2 = r_1 = 0$.

O Apêndice D apresenta o espelho dos comandos utilizados para a definição do modelo das estruturas apresentadas no capítulo VI. Convém repetir aqui que os comandos apresentados neste item correspondem à versão corrente do sistema, e estão sujeitos a modificações na implementação de versões mais desenvolvidas.

C A P Í T U L O V I

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO SISTEMA

CAPÍTULO VI

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DO SISTEMA

VI.1 - Introdução

Neste capítulo apresentam-se alguns exemplos de aplicação do sistema Crilo na análise de estruturas. Pretende-se, ao mesmo tempo, demonstrar a utilização da linguagem orientada descrita no capítulo anterior, e verificar os resultados apresentados pelos três modelos de análise disponíveis, a saber: o modelo tridimensional completo, o modelo bidimensional axissimétrico e o modelo quasi-axissimétrico. Os resultados dos dois primeiros modelos, que utilizam respectivamente elementos de casca geral e elementos de casca axissimétrica, são comparados com resultados analíticos clássicos ou com os fornecidos por programas já estabelecidos; para o modelo quasi-axissimétrico, que emprega os três elementos disponíveis, tomar-se-á como solução "exata" a fornecida pelo modelo tridimensional completo. O apêndice D apresenta os comandos da linguagem orientada, empregadas para descrever alguns dos exemplos que seguem.

VI.2 - Exemplo 1 — Casca Hemisférica Submetida a Momentos no Topo

Este exemplo e o seguinte são casos clássicos, e pretendem verificar o comportamento do elemento de casca axissimétrica. A Figura (VI.1) apresenta a geometria, características do material e carregamento; utilizou-se uma malha com 9 elementos axissimétricos, fazendo os seguintes intervalos, a partir da base da cúpula, em termos da coordenada esférica \varnothing : 0° , 20° , 40° , 45° , 50° , 54° , 55° , 56° , 57° , 58° , $58,5^{\circ}$, 59° , $59,5^{\circ}$ e 60° . Os resul-

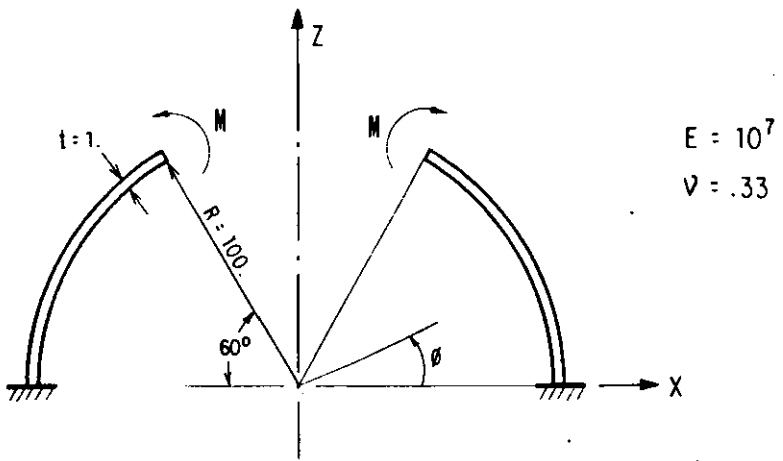
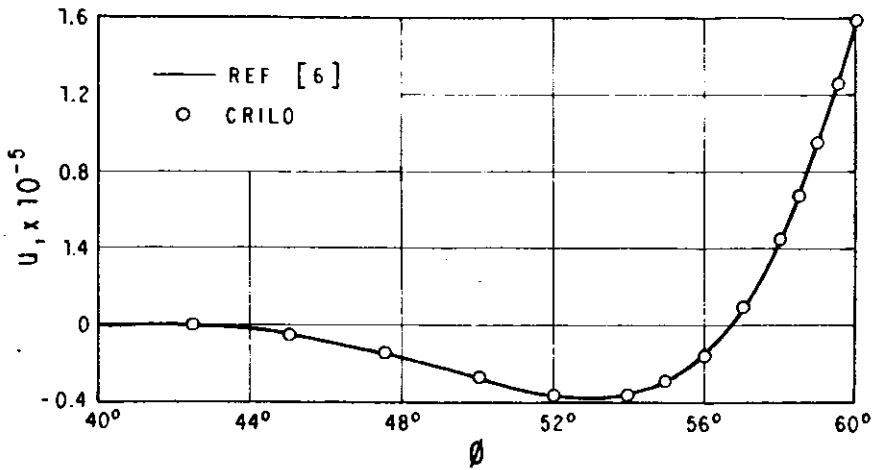
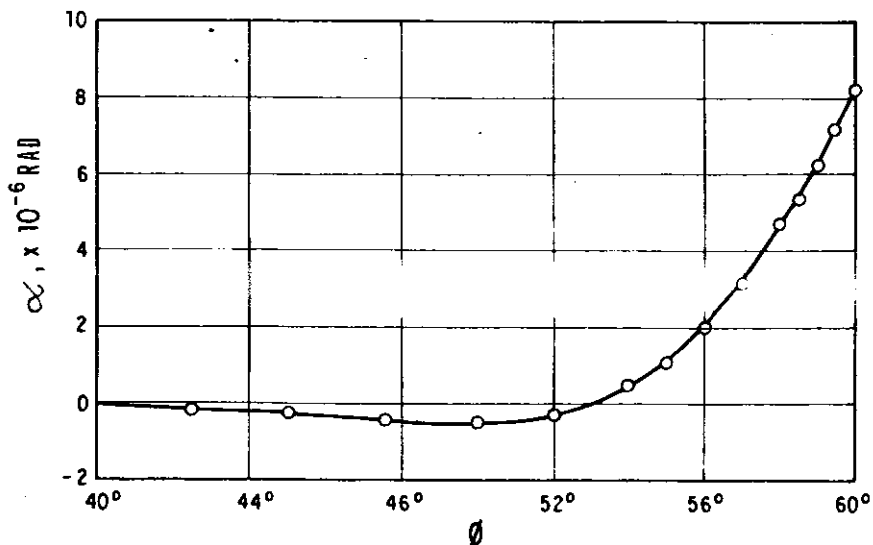


Figura VI.1 - Exemplo 1



(a) Deslocamentos horizontais



(b) Rotações em torno da direção circunferencial

Figura VI.2 - Resultados para o exemplo 1

tados são comparados com os fornecidos na ref. (6), e estão apresentados na Figura (VI.2). Observa-se neste caso o excelente comportamento deste elemento, que chega à solução exata com uma malha três vezes menos refinada que a utilizada na ref. (6).

VI.3 - Exemplo 2 - Cilindro Sob a Ação de Momentos nas Extremidades

A Figura (VI.3) apresenta a geometria, características do material e carregamento para o segundo exemplo. Neste caso, o carregamento é representado por 2 harmônicos de Fourier. A malha utilizada consiste em 17 elementos axissimétricos, fazendo os seguintes intervalos a partir do topo do cilindro, em termos da coordenada z : 11 x 0.1, 5 x 0.2, 0.4. A metade inferior do cilindro não foi discretizada, tirando-se partido da condição de simetria. Os resultados são comparados com os fornecidos nas refs. (7) e (24), e estão representados na Figura (VI.4).

VI.4 - Exemplo 3 - Casca Cilíndrica Submetida a Duas cargas Concentradas

Este exemplo e o seguinte são também casos clássicos, muito explorados na literatura do método dos elementos finitos para a verificação do comportamento e convergência de elementos de casca geral. A Figura (VI.5) apresenta, para este exemplo, a geometria, malhas utilizadas, características do material e carregamento; os resultados são comparados com os fornecidos nas refs. (8) e (9), e estão apresentados na Figura (VI.6).

VI.5 - Exemplo 4 - Cobertura Circular Sob Peso Próprio

A Figura (VI.7) apresenta a geometria, malhas utilizadas, características do material e carregamento para a casca

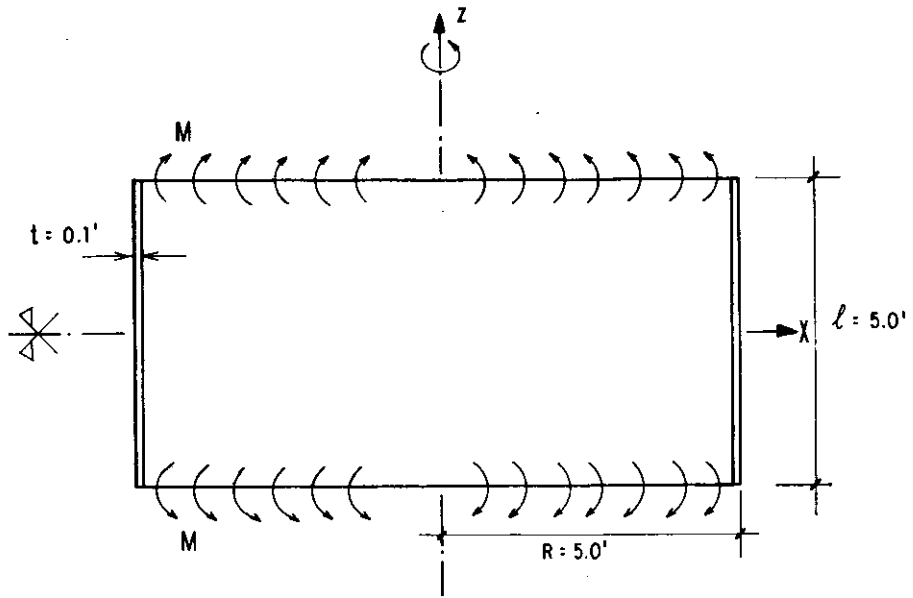


Figura VI.3 - Exemplo 2

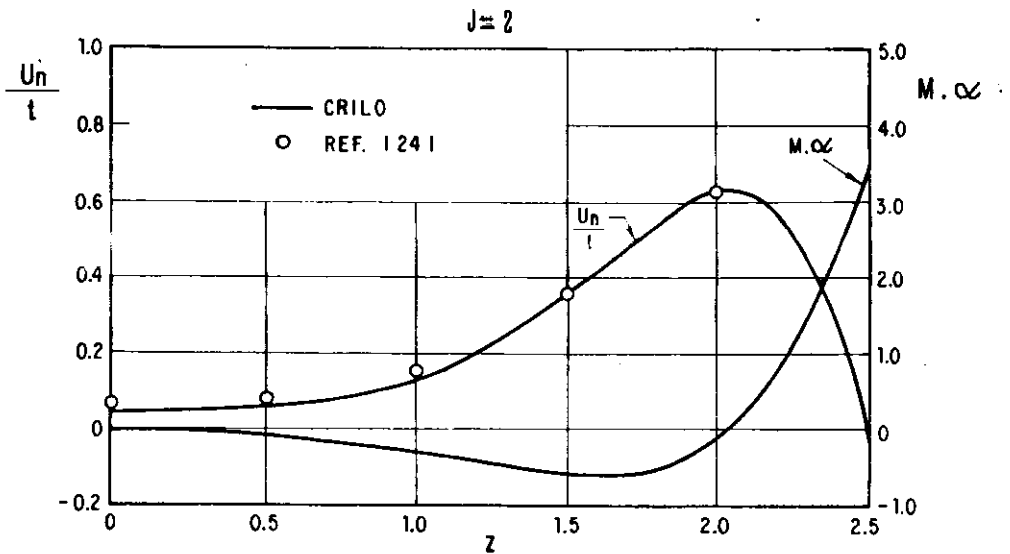
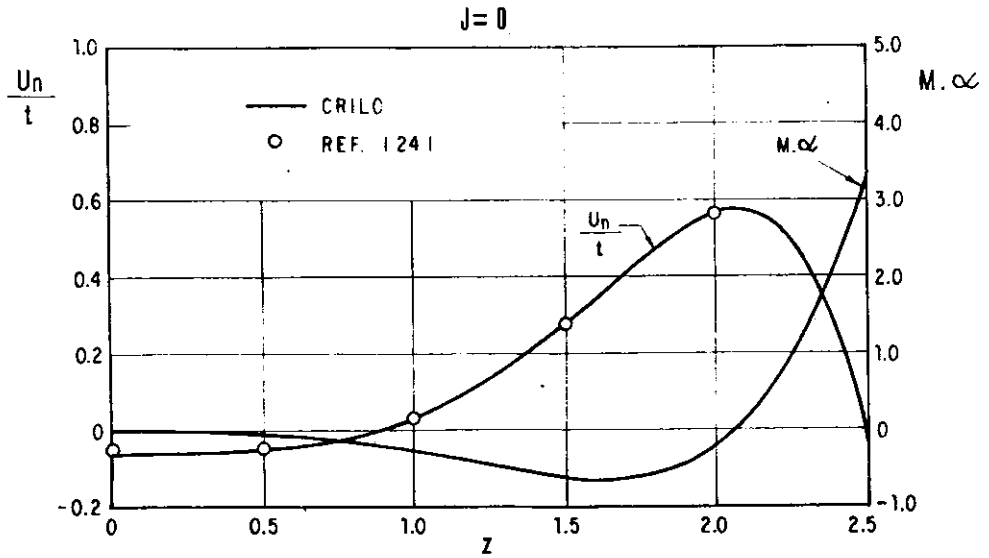
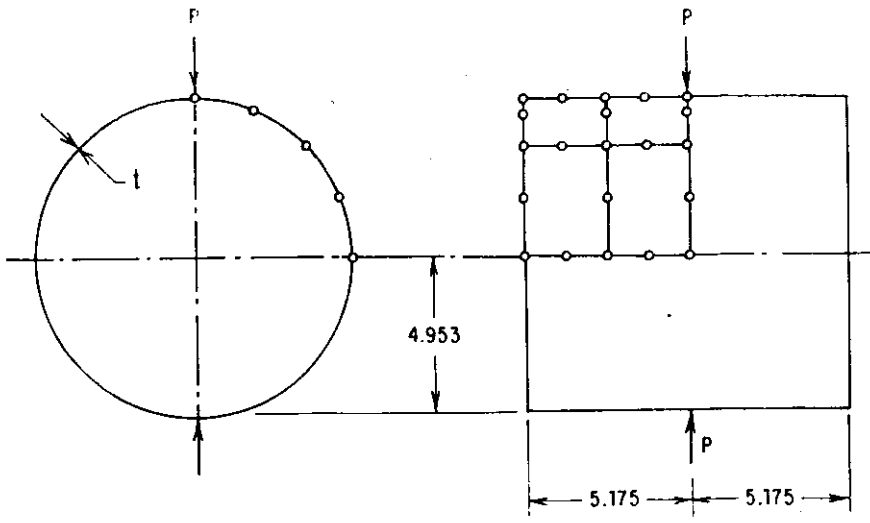
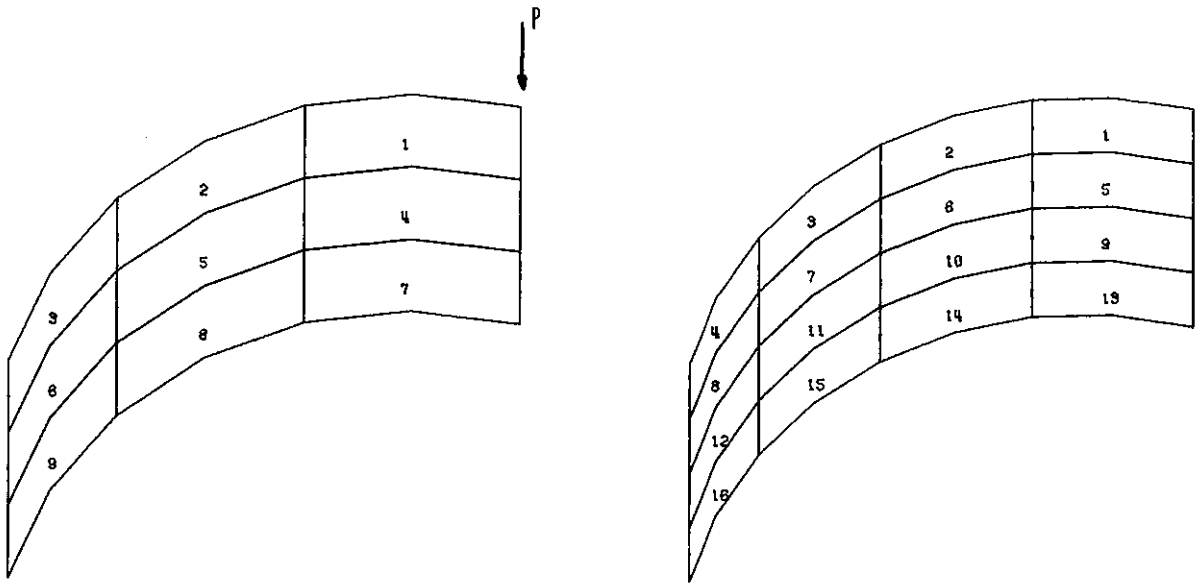


Figura VI.4 - Resultados para o exemplo 2 - harmônicos 0 e 2

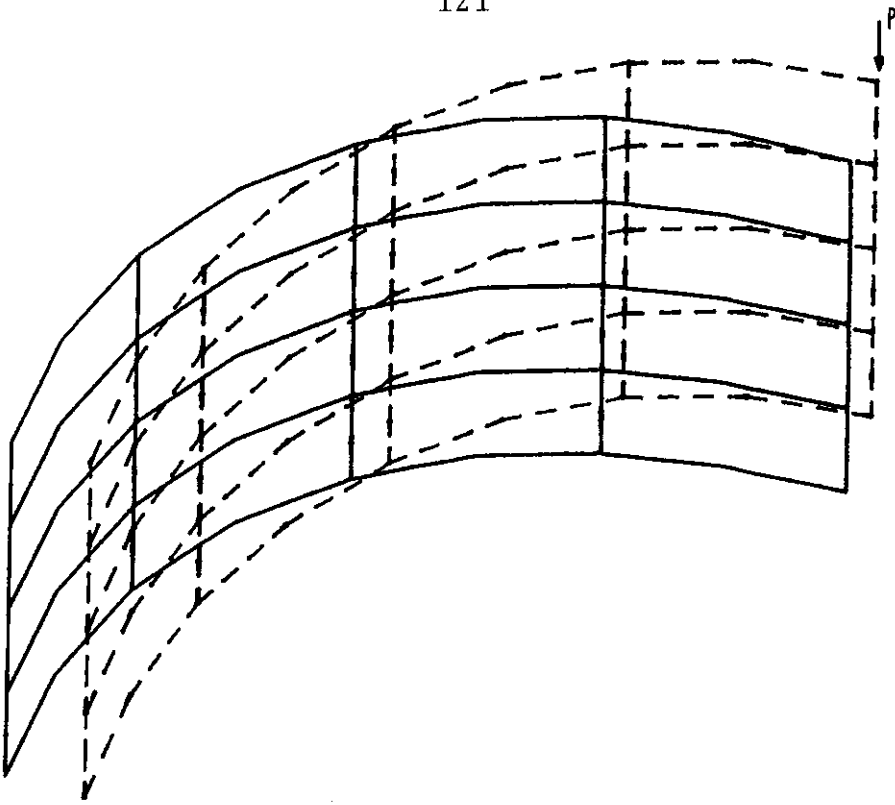


(a) Geometria, características do material e carregamento; malha com 2 x 2 elementos gerais em um oitavo da casca, que tem contornos livres



(b) "Plots" de malhas 3 x 3 e 4 x 4

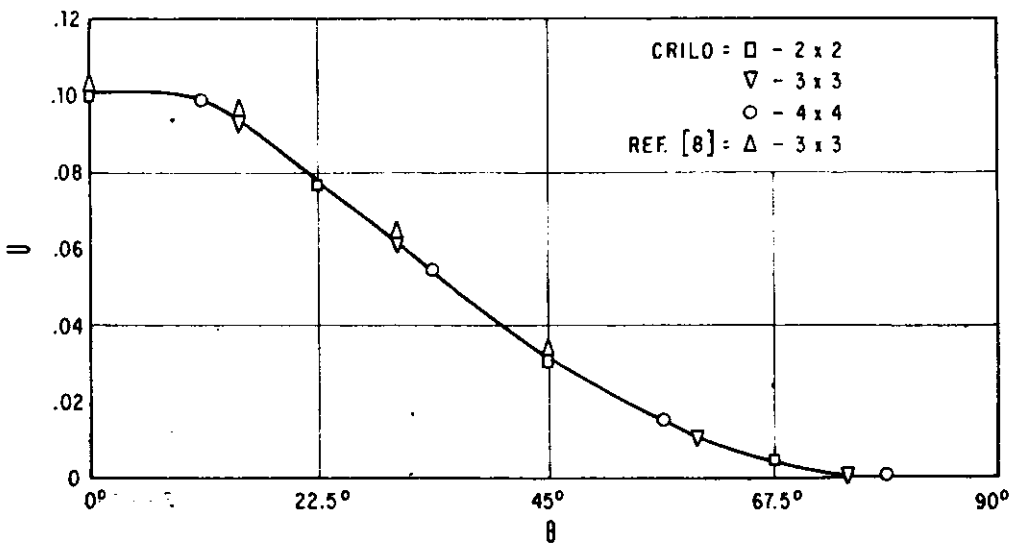
Figura VI.5 - Exemplo 3



(a) "plot" da configuração deformada

Malha	2 x 2	3 x 3	4 x 4	Teórico ⁸	Teórico ⁹
U	.1068	.1087	.1092	.1086	.1139

(b) Deslocamentos verticais sob o ponto de aplicação da carga



(c) Deslocamentos verticais ao longo do arco que contém o ponto de aplicação da carga

Figura VI.6 - Resultados para o exemplo 3

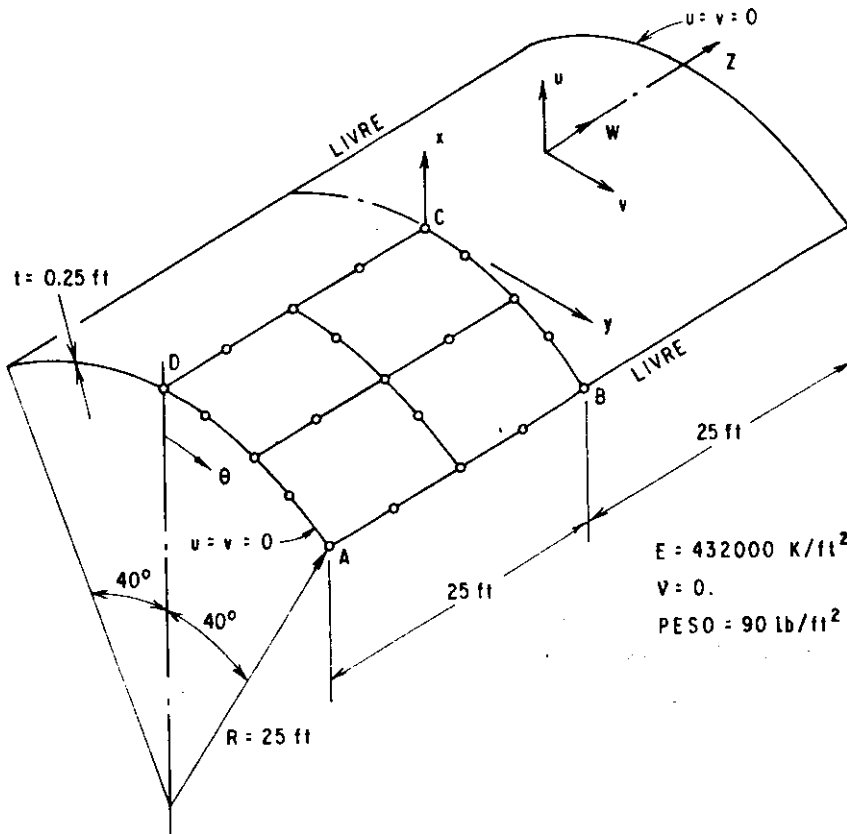
em estudo. Tirou-se partido da simetria, discretizando-se apenas um quarto da estrutura com elementos de casca geral.

Os resultados são comparados com os fornecidos na ref. 9 e estão apresentados na Figura (VI.8). Observa-se que com a malha 2×2 já se obtém boa convergência.

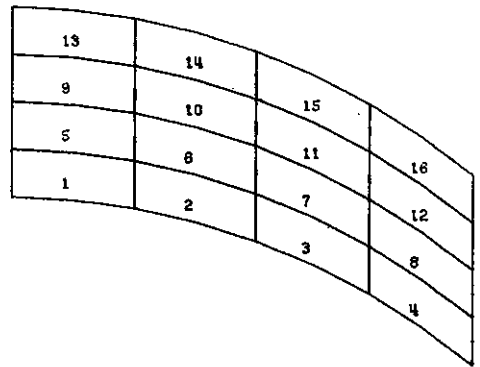
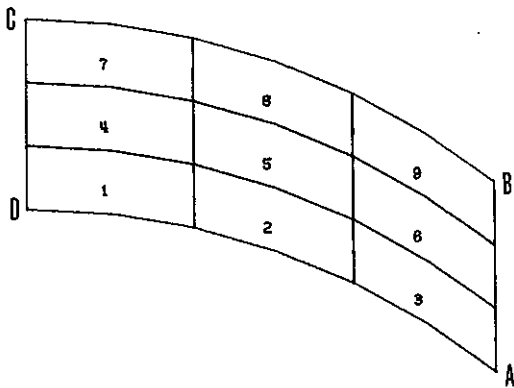
VI.6 - Exemplo 5 — Cilindro Sob a Ação de Momentos nas Extremidades — Modelo Quasi-Axissimétrico

Os exemplos que seguem pretendem verificar o comportamento do modelo quasi-axissimétrico, com a utilização do elemento de transição. Optou-se inicialmente por analisar a estrutura apresentada no item VI.3, utilizando-se a malha da Figura (VI.9), e comparar os resultados obtidos pelos dois modelos. A malha quasi-axissimétrica utilizada foi obtida substituindo-se, na região indicada por "T" na Figura (VI.9.a), 9 elementos axissimétricos por 24 elementos de transição; observa-se que isto implica em uma redução na gradação da malha segundo a direção meridional. Consideram-se agora 3 harmônicos de momentos sobre a extremidade do cilindro: $j = 0, 2, 4$. Para a malha de transição tirou-se partido da simetria da estrutura, discretizando-se apenas um quadrante e aplicando as devidas condições de contorno nos pontos nodais. Os resultados são apresentados na Figura (VI.10), e mostram boa concordância entre os modelos.

A listagem dos comandos utilizados para descrever este problema está apresentada no apêndice D, aonde pode-se observar as características particulares para a entrada de dados para o elemento de transição. Considera-se que o elemento incide sobre cinco pontos nodais e um círculo nodal. Como características suplementares, deve-se indicar: a) a incidência da linha

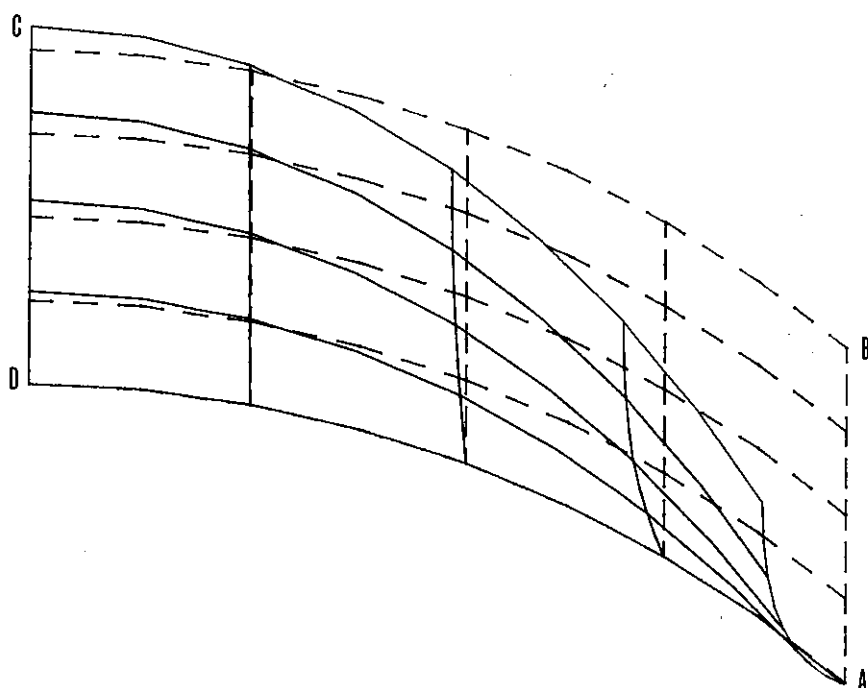


(a) Geometria, características do material e carregamento; malha com 2 x 2 elementos de casca geral



(b) "plots" de malhas 3 x 3 e 4 x 4

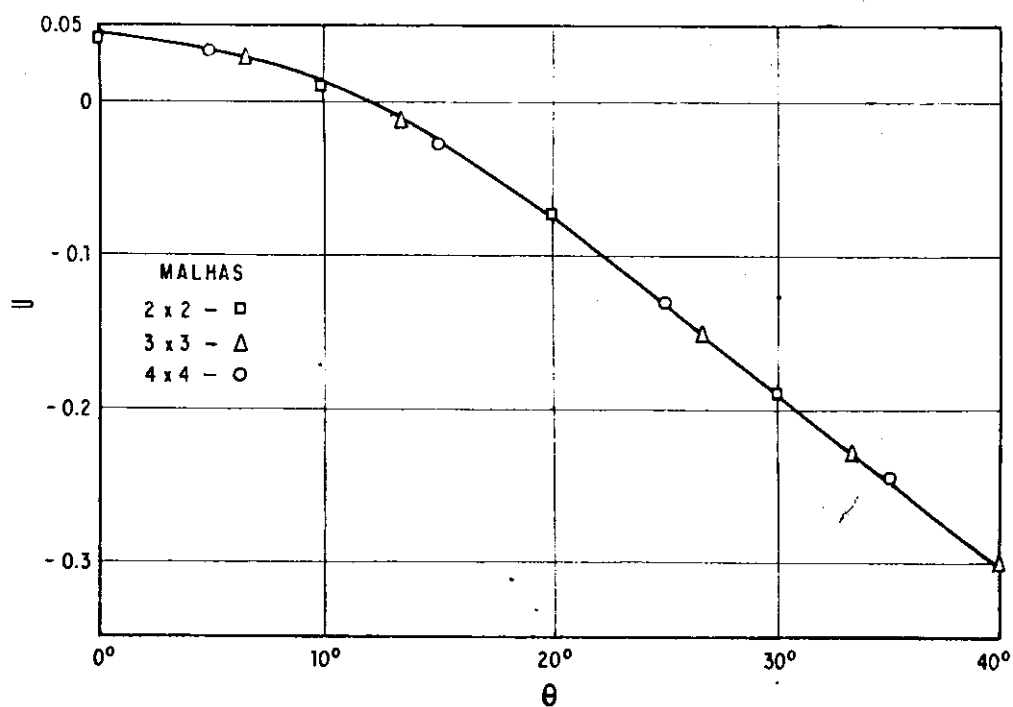
Figura VI.7 - Exemplo 4



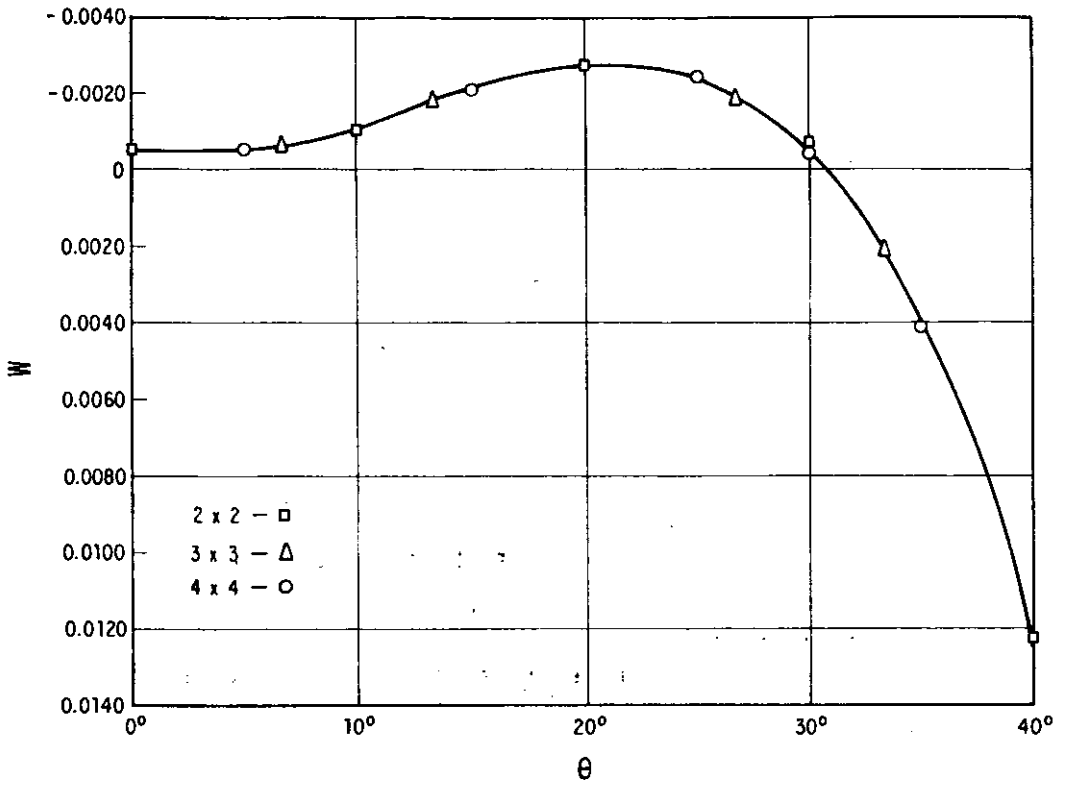
(a) "plot" da configuração deformada

Malha	u_B	$u_C \times 10^{-1}$	$w_A \times 10^{-1}$	N_{ZB}	M_{ZB}
2 x 2	-.2925	.4248	.1232	75.65	-.9922
3 x 3	-.2985	.4404	.1248	76.39	-.9148
4 x 4	-.2968	.4387	.1242	75.76	-.9398
Teórico	-.3086	.4375	.1261	76.95	-.9272

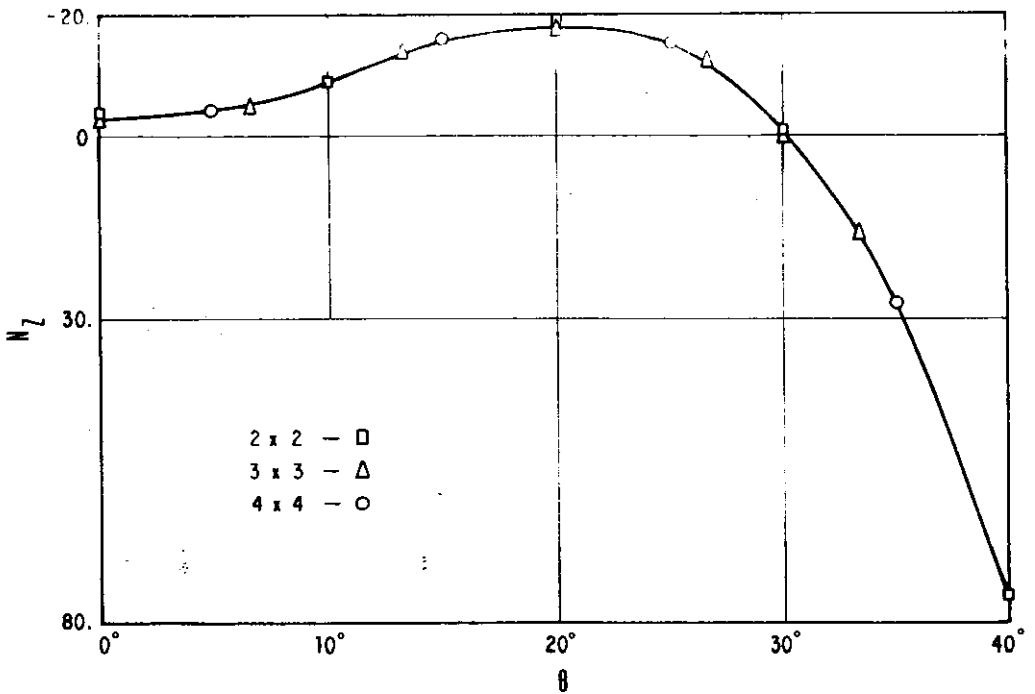
(b) Comparação com resultados teóricos (ref. (9))



(c) Deslocamentos verticais ao longo do arco CB

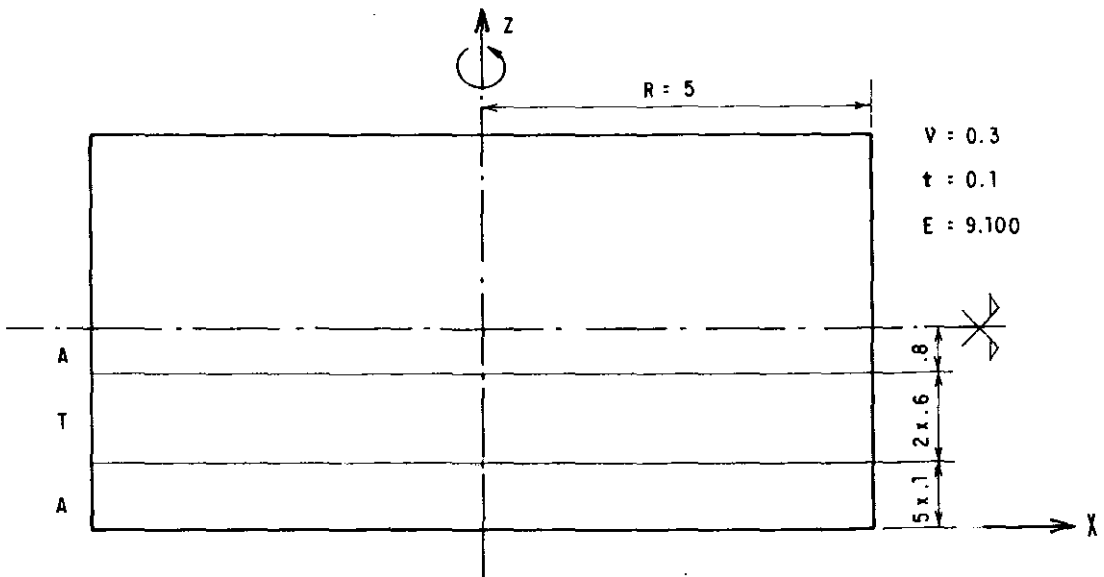


(d) deslocamentos longitudinais ao longo do arco CB

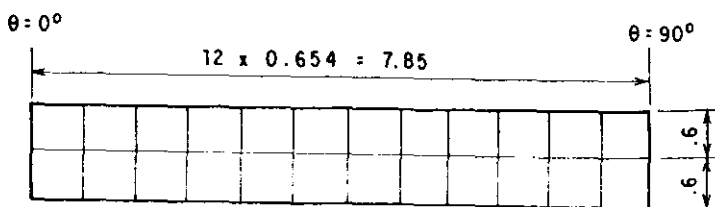


(e) Esforços longitudinais N_z ao longo do arco CB

Figura VI.8 - Resultados para o exemplo 4

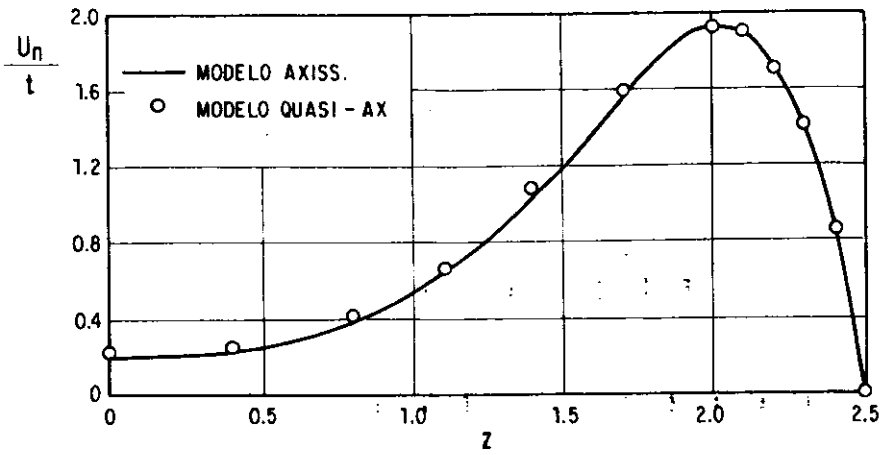


(a) Malha utilizada - A - elementos axissimétricos
T - elementos de transição

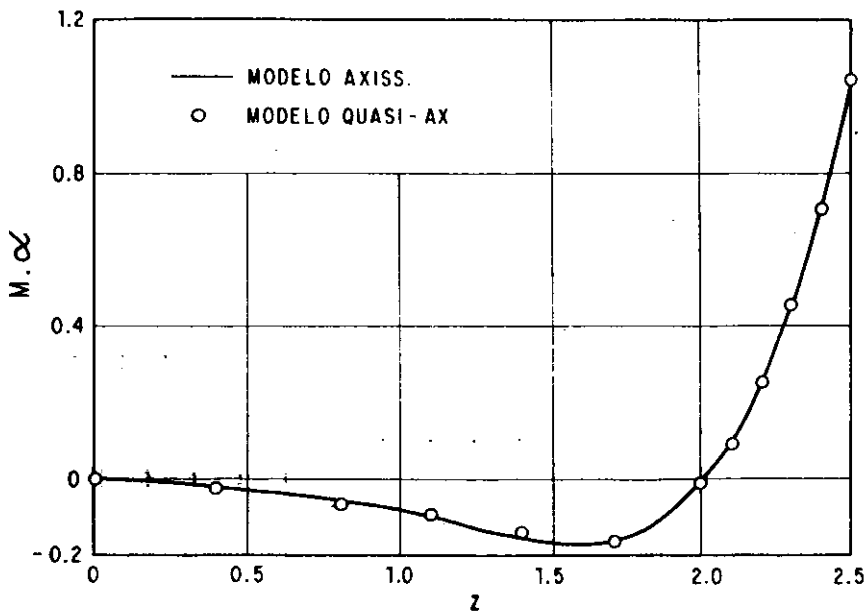


(b) malha de elementos de transição

Figura VI.9 - Exemplo 5



(a) $\frac{u_n}{t}$ para os harmônicos 0, 2, 4 atuando simultaneamente



(b) $M.\alpha$ para os harmônicos 0, 2, 4 atuando simultaneamente

Figura VI.10 - Resultados para o exemplo 5

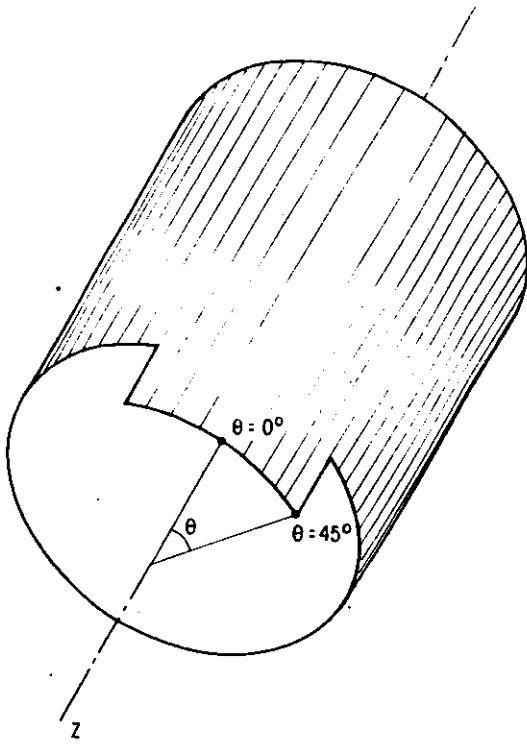
nodal, definida pelos nomes numéricos dos subnós fixos que a compõem, e b) o azimuth destes subnós (em termos da coordenada angular $teta$). A incidência da linha nodal, bem como a do elemento em si, deve ser descrita seguindo-se a ordem indicada na Figura (III.2). Deve-se ressaltar que a correlação incidência do elemento-incidência da linha nodal é feita observando-se a ordem externa de precedência, ou seja, ao primeiro elemento de transição deve corresponder a primeira linha nodal e assim por diante.

VI.7 - Exemplo 6 - Casca Cilíndrica "Quasi-Axissimétrica"

Os exemplos que seguem são estruturas que apresentam geometria "quasi-axissimétrica", mais adequados para a utilização do modelo quasi-axissimétrico. A Figura (VI.11) apresenta uma estrutura derivada a partir do exemplo anterior, considerando-se agora a existência de um setor circular que se projeta além da extremidade do cilindro. As características geométricas e do material são apresentadas na Figura (VI.11.a); a Figura (VI.11.b) mostra um esquema da malha utilizada para o modelo quasi-axissimétrico. O carregamento consiste em momentos aplicados na extremidade do setor, sobre os pontos nodais dos elementos. Os resultados são comparados com os fornecidos por uma malha de 30 elementos gerais, e estão apresentados na Figura (VI.12).

VI.8 - Exemplo 7 - Tubo com Furos

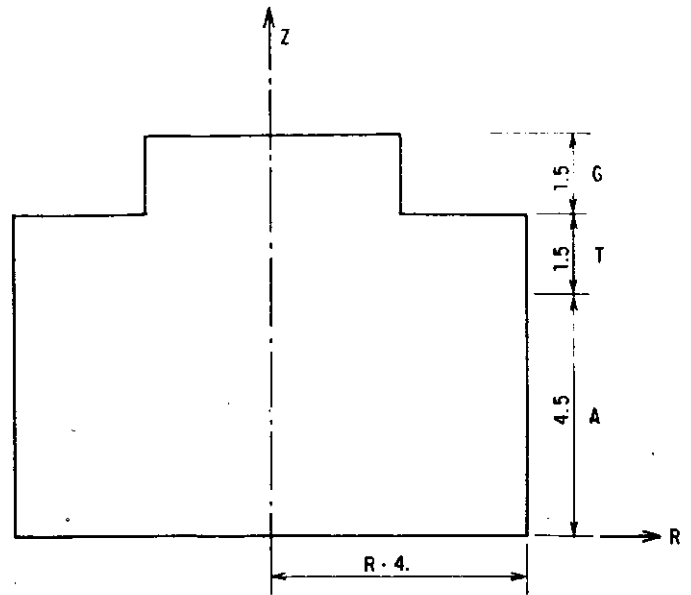
Este exemplo consiste em uma seção tubular com furos, como indicam as figuras (VI.13) e (VI.14). Estas figuras apresentam "plots" da geometria de um oitavo da estrutura, discretizada por elementos tridimensionais, bem como as características do material utilizado. O carregamento consiste em cargas a-



(a) Geometria

$$E = 10500. \quad t = .1$$

$$V = .3125 \quad R = 4.$$



(b) Malha quasi-axissimétrica

A - 4 elementos axissimétricos

T - 9 elementos de transição

G - 6 elementos gerais

Consideram-se 4 harmônicos de deslocamentos

Figura VI.11 - Exemplo 6

Z	7.5	7.125	6.75	6.375	6.	5.25
3-D	306	154	42	17	4	-2
Quasi-AX	303	151	39	15	5	-2

(a) Rotações em torno da direção circunferencial, ao longo de uma linha com $\theta = 45^\circ$ (10^{-3} radianos)

θ	45°	30°	15°	0°
3-D	306	191	164	89
Quasi-AX	303	189	164	91

(b) Rotações em torno da direção circunferencial, ao longo da extremidade do setor (10^{-3} radianos)

Figura VI.12 - Resultados para o exemplo 6

$$E = 9100.$$

$$t = .1$$

$$\mu = .3$$

$$R = 5.$$

$$\frac{L}{2} = 11.5$$

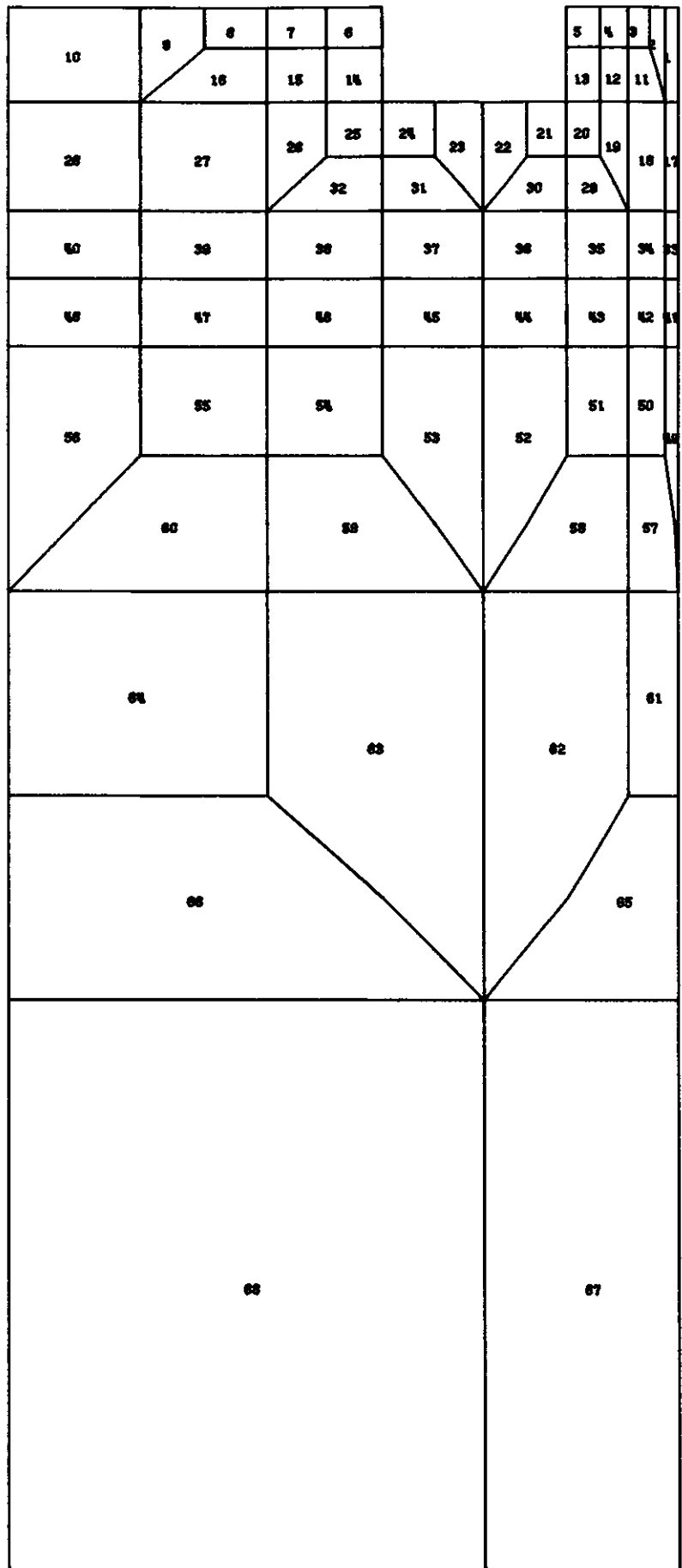


Figura VI.13 - Projeção XZ, com numeração dos elementos

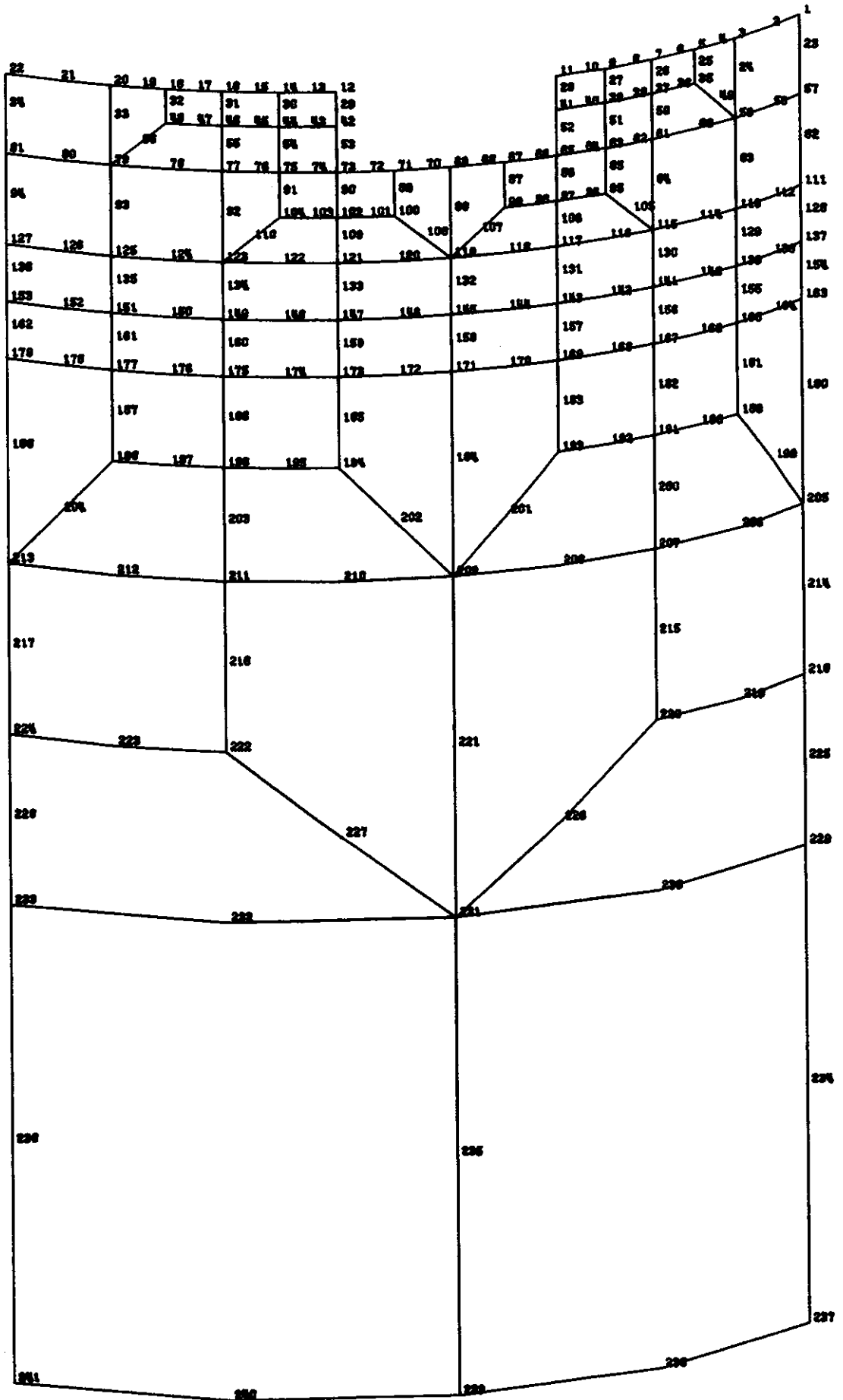


Figura VI.14 - Perspectiva com numeração dos nós

plicadas nos nós 1 e 23, nas direções globais x e y. As figuras (VI.15) e (VI.17) apresentam "plots" da configuração deformada da estrutura, obtidos a partir da análise do modelo tridimensional.

O modelo quasi-axissimétrico utilizado está apresentado na figura (VI.18), que mostra a malha de elementos gerais, axissimétricos e de transição utilizados. Deve-se ressaltar que a representação dos elementos axissimétricos e de transição é simbólica, já que os círculos nodais estão representados apenas por pontos de coordenada cilíndrica $\theta=0^0$. Foram considerados 6 harmônicos de deslocamentos na região axissimétrica.

Neste exemplo pretende-se, além de comparar os resultados fornecidos pelos modelos quasi-axissimétrico e tridimensional, verificar o desempenho do sistema computacional desenvolvido frente a outro sistema já estabelecido e de domínio público — no caso, a linguagem orientada *Lorane-Linear*¹⁹, implantada no mesmo computador B-6700 do NCE/UFRJ. Para isto, optou-se por modelar a estrutura com elementos de casca poliédrica triangular, do tipo "CPH1", de formulação híbrida, com variação cúbica dos deslocamentos ao longo dos lados do elemento. A malha utilizada está apresentada nas figuras (VI.19) e (VI.20), aonde pode ser verificado que mantiveram-se os mesmos nós utilizados para o modelo tridimensional do sistema Crilo, portanto com o mesmo número de graus de liberdade. Observa-se também que cada elemento de oito nós foi subdividido em seis elementos triangulares. Os resultados das três análises são comparados na figura (VI.21), observando-se uma boa concordância.

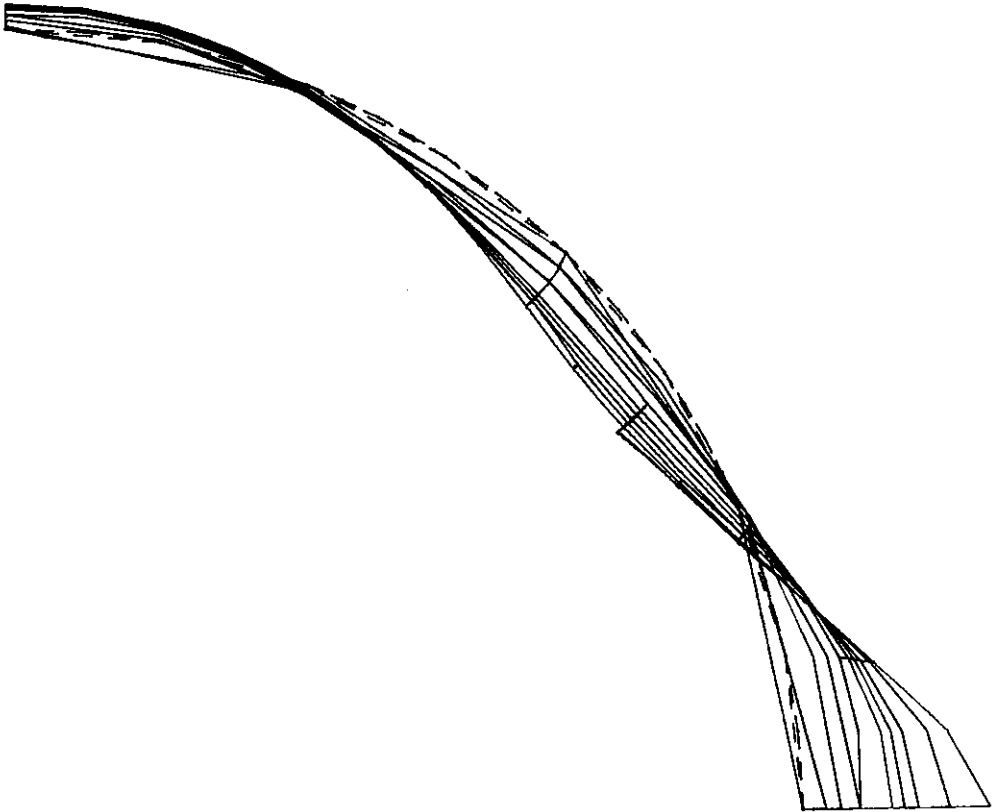


Figura VI.15 - Projeção XY da configuração deformada

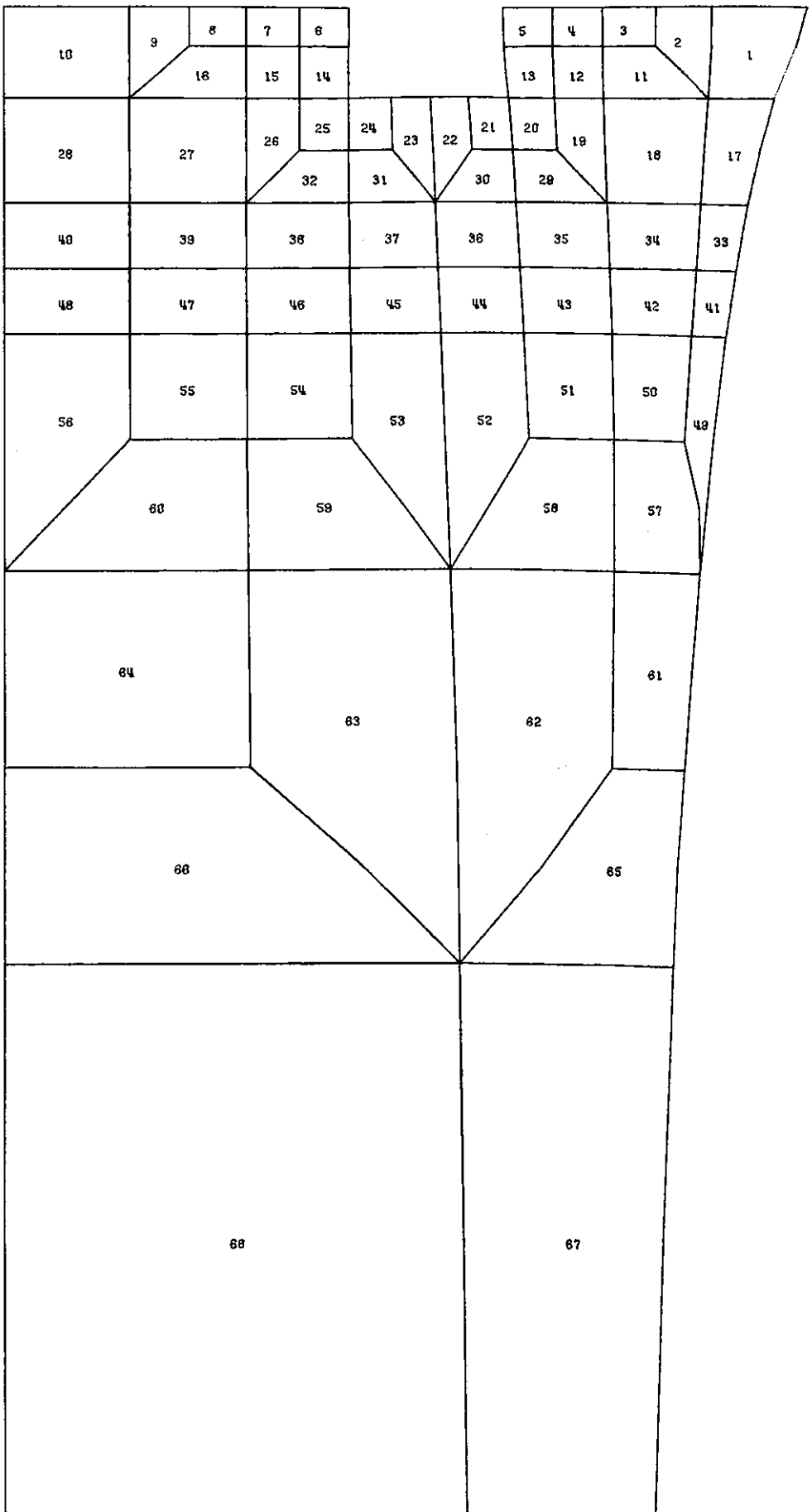


Figura VI.16 - Projeção XZ da configuração deformada

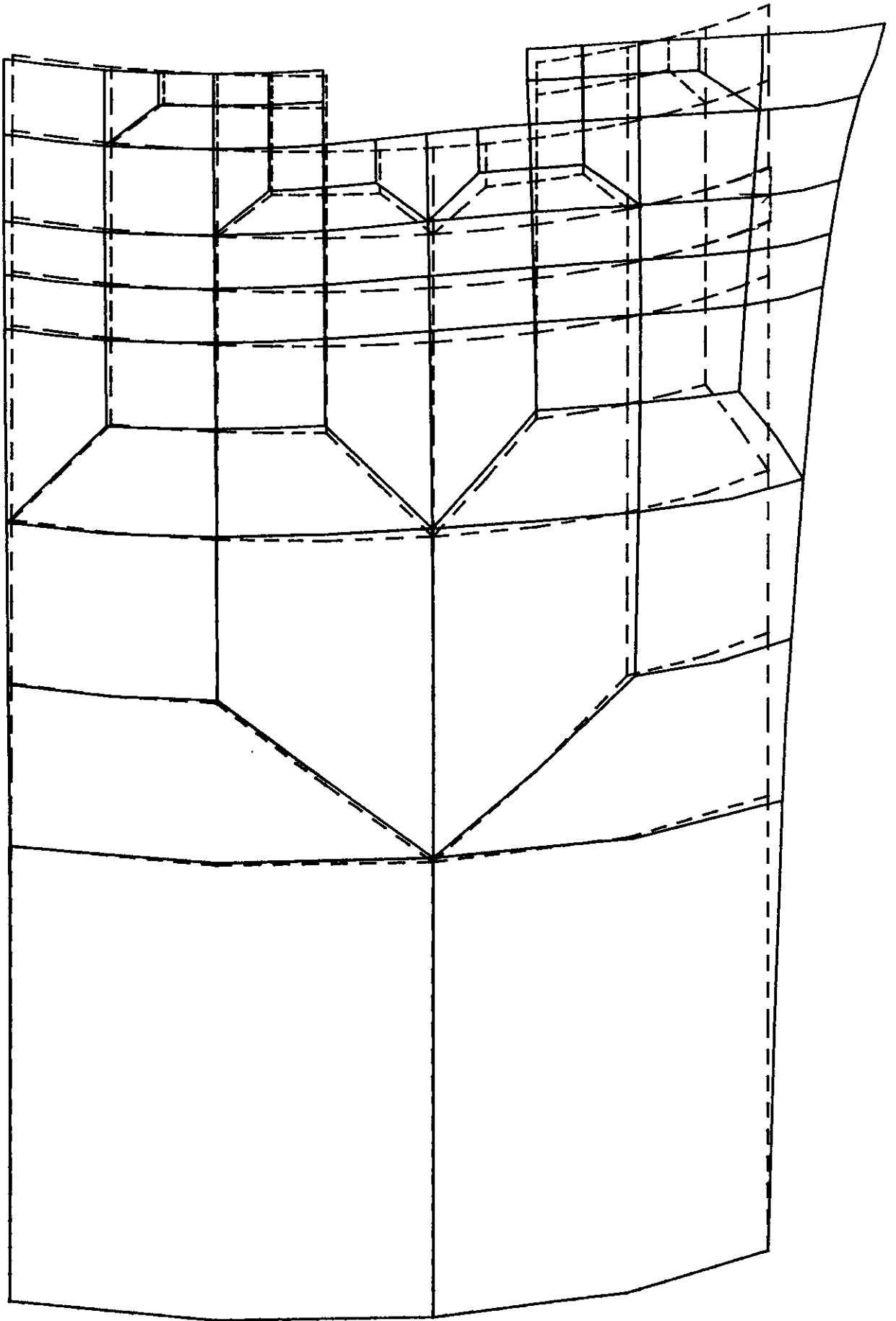


Figura VI.17 - Perspectiva da configuração deformada (em tracejado, a geometria inicial)

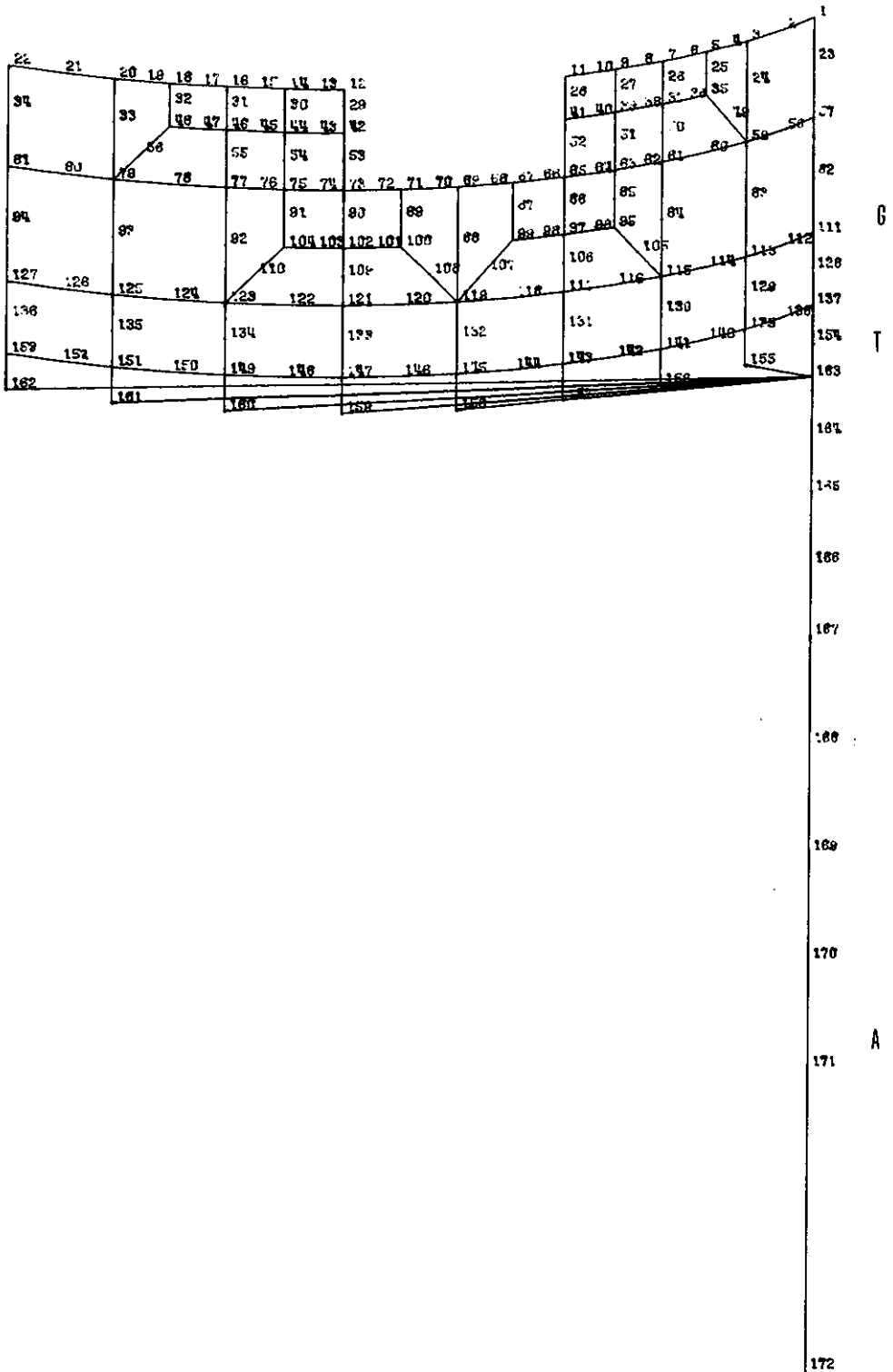


Figura VI.18 - Modelo quasi-axissimétrico

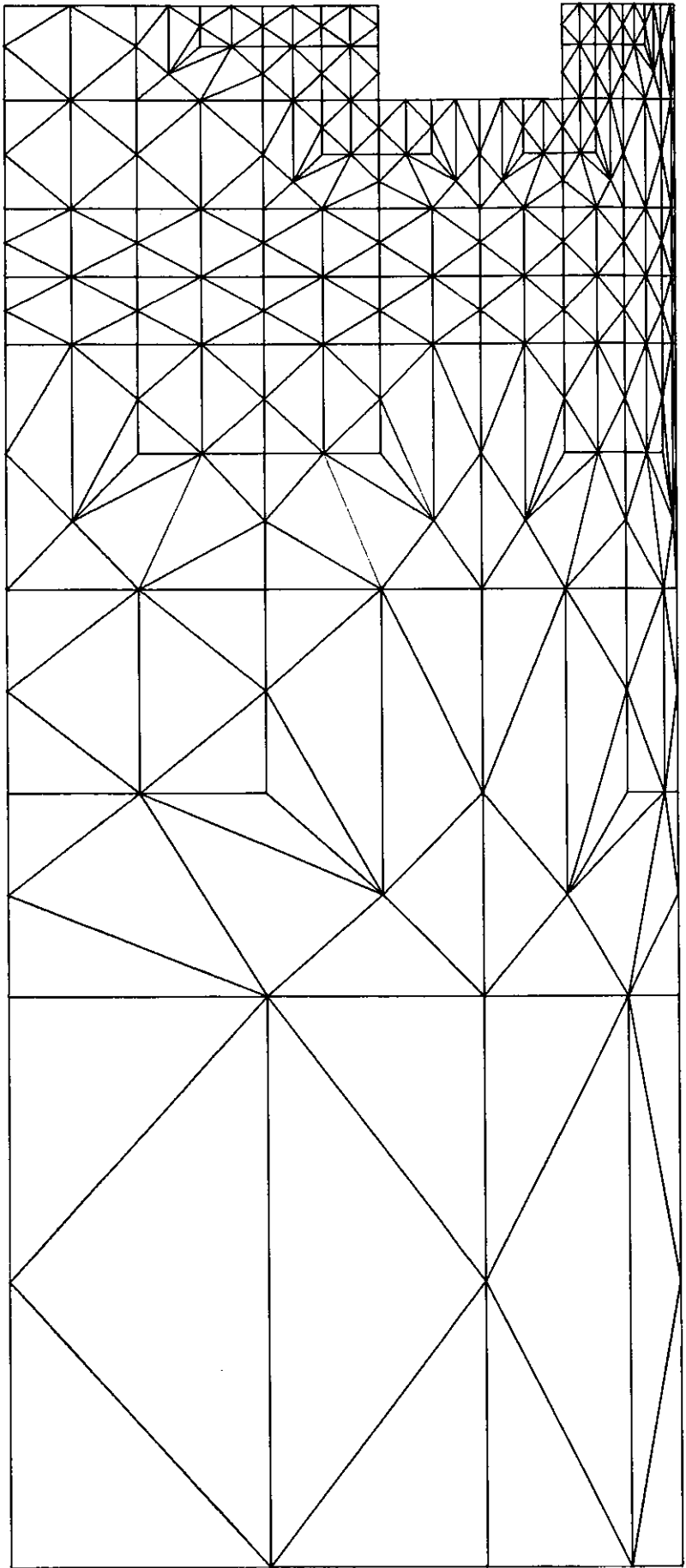


Figura VI.19 - Malha de elementos triangulares CPTH1
Projeção XZ

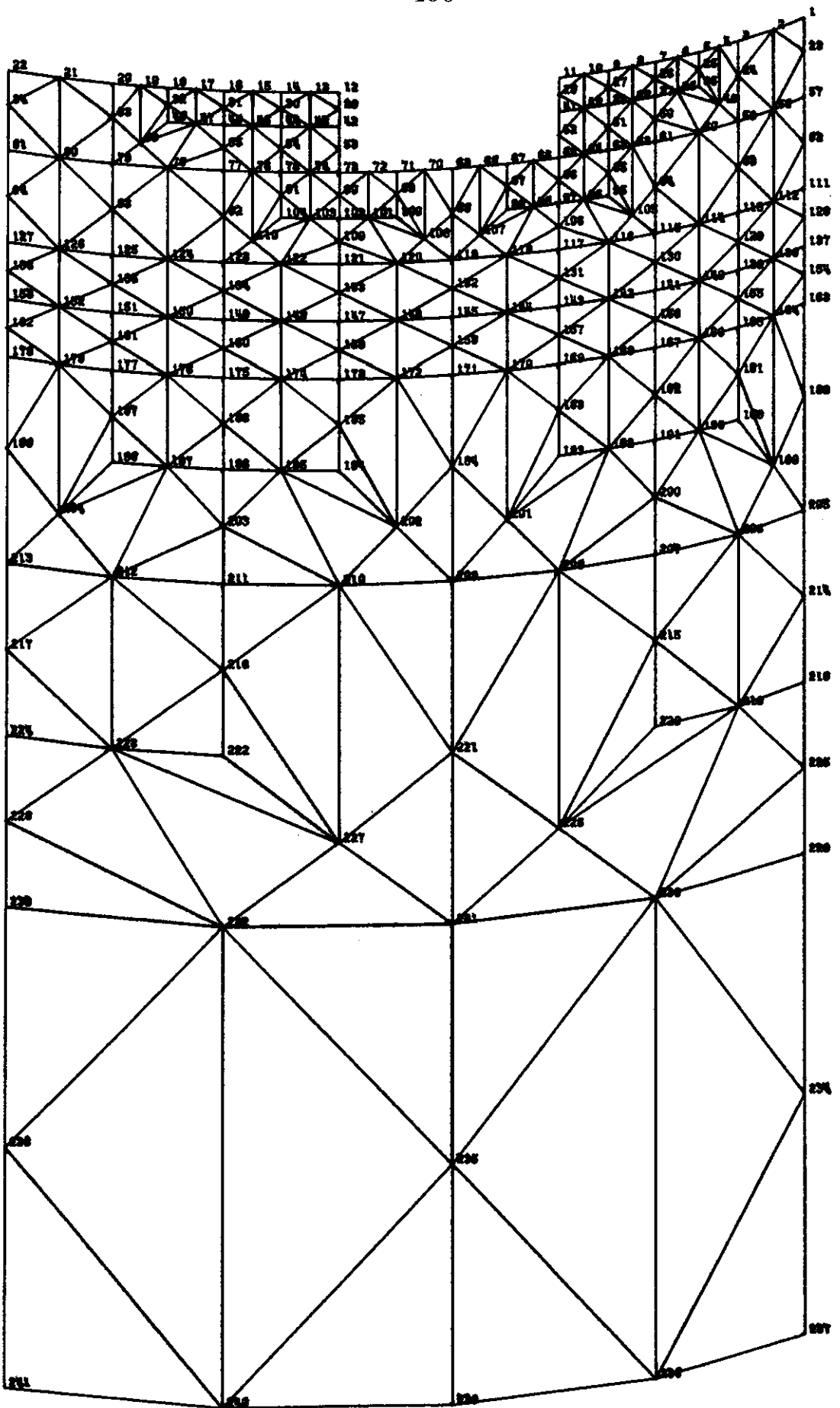
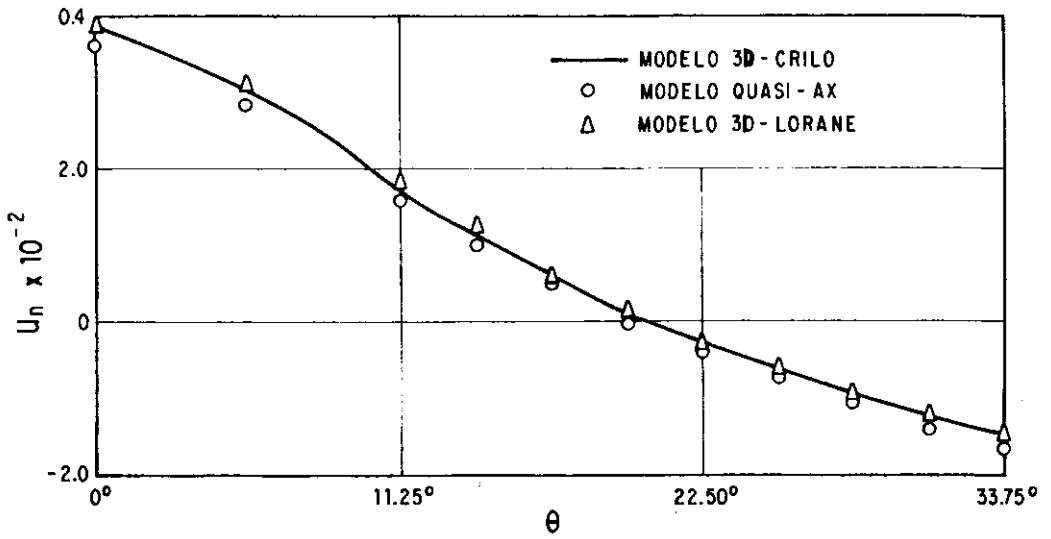
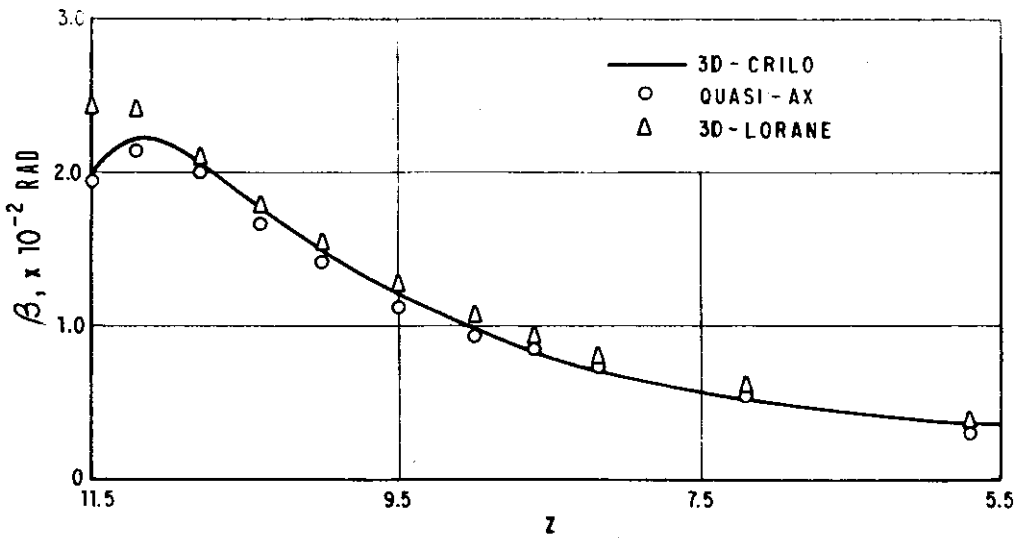


Figura VI.20 - Malha de elementos triangulares CPTH1
Perspectiva



(a) Deslocamentos radiais ao longo do arco com $z = 11.5$



(b) Rotações em torno da direção meridional, ao longo da linha com $\theta = 11.25^\circ$

	Lorane	Crilo 3-D	Crilo Quasi-AX
Montagem	686	363	309
Resolução	1383	1049	977

(c) Tempos de processamento em segundos

Figura VI.21 - Resultados para o exemplo 7

O sistema B-6700 não favorece uma comparação precisa de tempos de processamento, já que o mesmo problema, analisado em ocasiões diferentes, pode apresentar grandes variações no tempo de CPU dispendido. De qualquer forma, é interessante mencionar, a título de ilustração, os tempos para a geração da matriz de rigidez global e resolução do sistema de equações que foram dispendidos nestas análises. Estes tempos estão apresentados na figura (VI.21.c).

VI.9 - Exemplo 8 - Cúpula "Quasi-axissimétrica"

O último exemplo consiste em um domo esférico sobre uma parede circular, apresentando duas aberturas dispostas simetricamente. As figuras (VI.22) a (VI.25) apresentam a geometria e características do material para esta estrutura; a geometria está representada por "plots" da malha tridimensional utilizada para um quarto da estrutura. O carregamento consiste em cargas concentradas atuando sobre as bordas das aberturas com coordenada cilíndrica $\theta = 22.5^\circ$.

A malha de elementos gerais utilizada para o modelo tridimensional é composta por 95 elementos e 332 nós, perfazendo um total de 1660 graus de liberdade. Para o modelo quasi-axissimétrico foram utilizados 15 elementos gerais, na região situada entre as coordenadas esféricas $\phi = 58^\circ$ e 70° ; 18 elementos axissimétricos, considerando-se 7 harmônicos de Fourier, nas regiões com ϕ acima de 73° e abaixo de 54° ; e 18 elementos de transição entre as regiões geral e axissimétrica, perfazendo um total de 1810 graus de liberdade. Os resultados destas análises são apresentados nas figuras (VI.26) a (VI.28). As figuras (VI.26) a (VI.27) mostram "plots" da configuração deformada, com os deslocamentos am-

$$E = 10500.$$

$$\mu = .3125$$

$$t = 1.$$

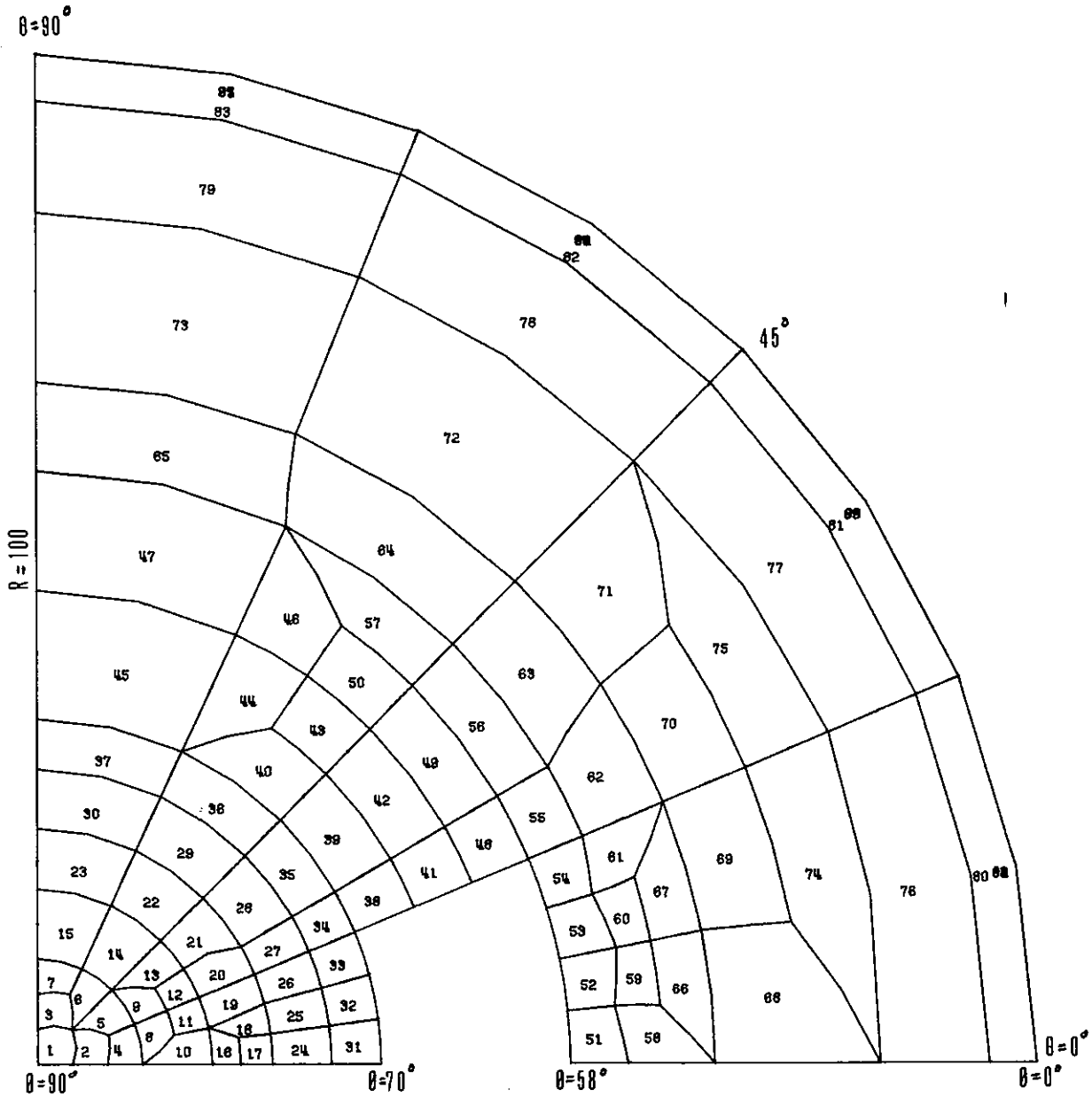


Figura VI.22 - Projeção XY, com numeração dos elementos

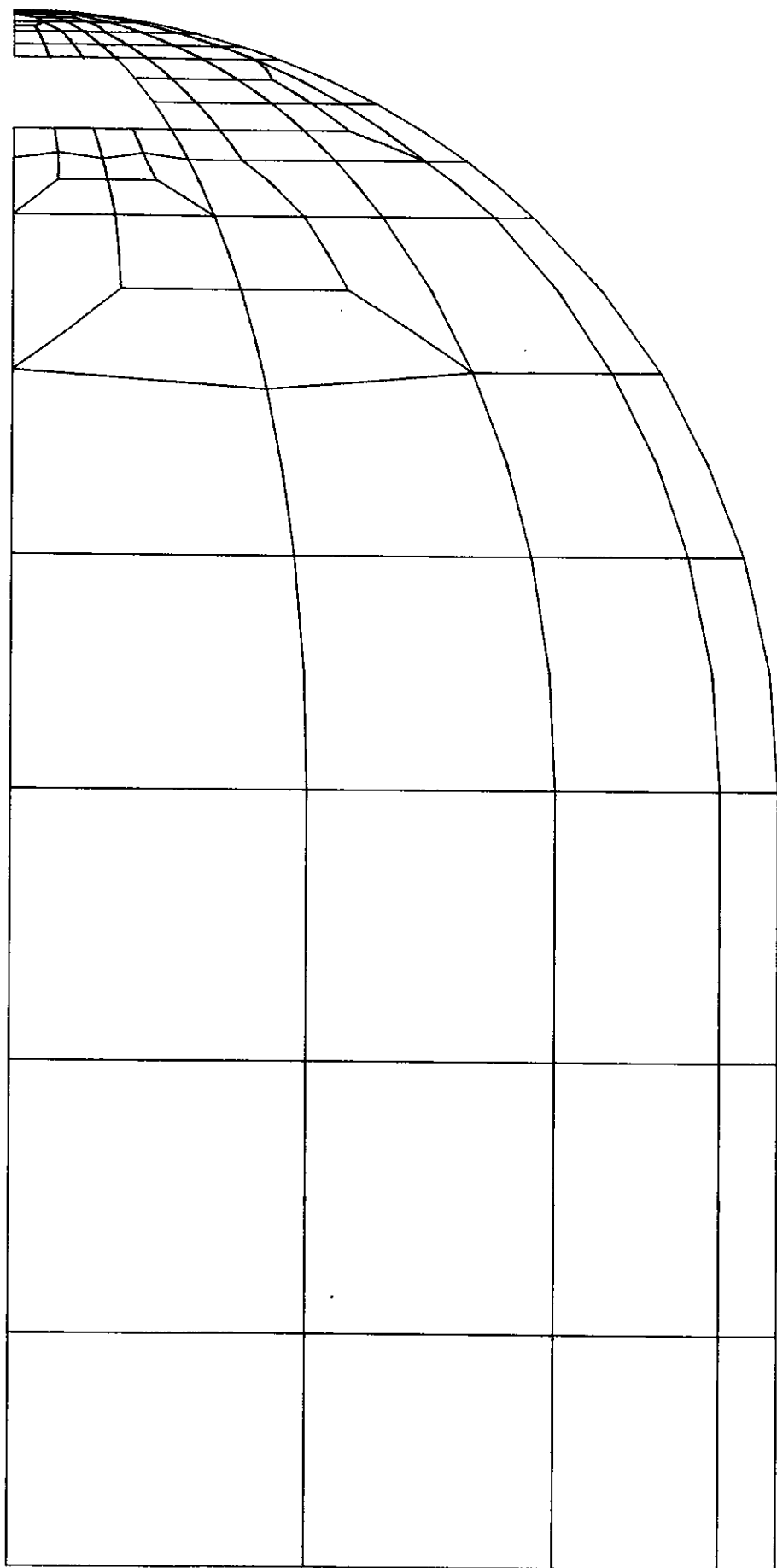


Figura VI.23 - Projeção YZ

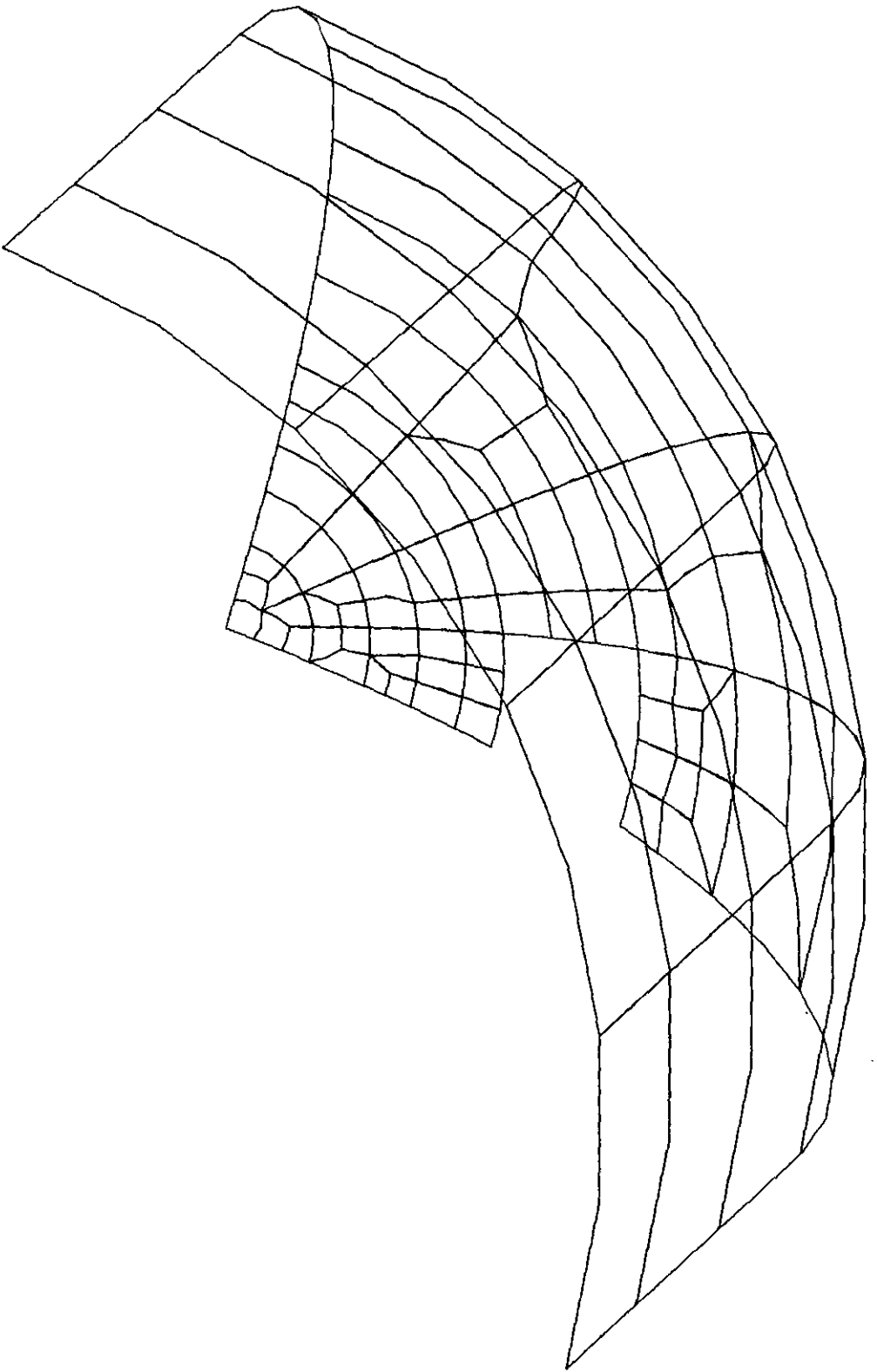


Figura VI.24 - Perspectiva

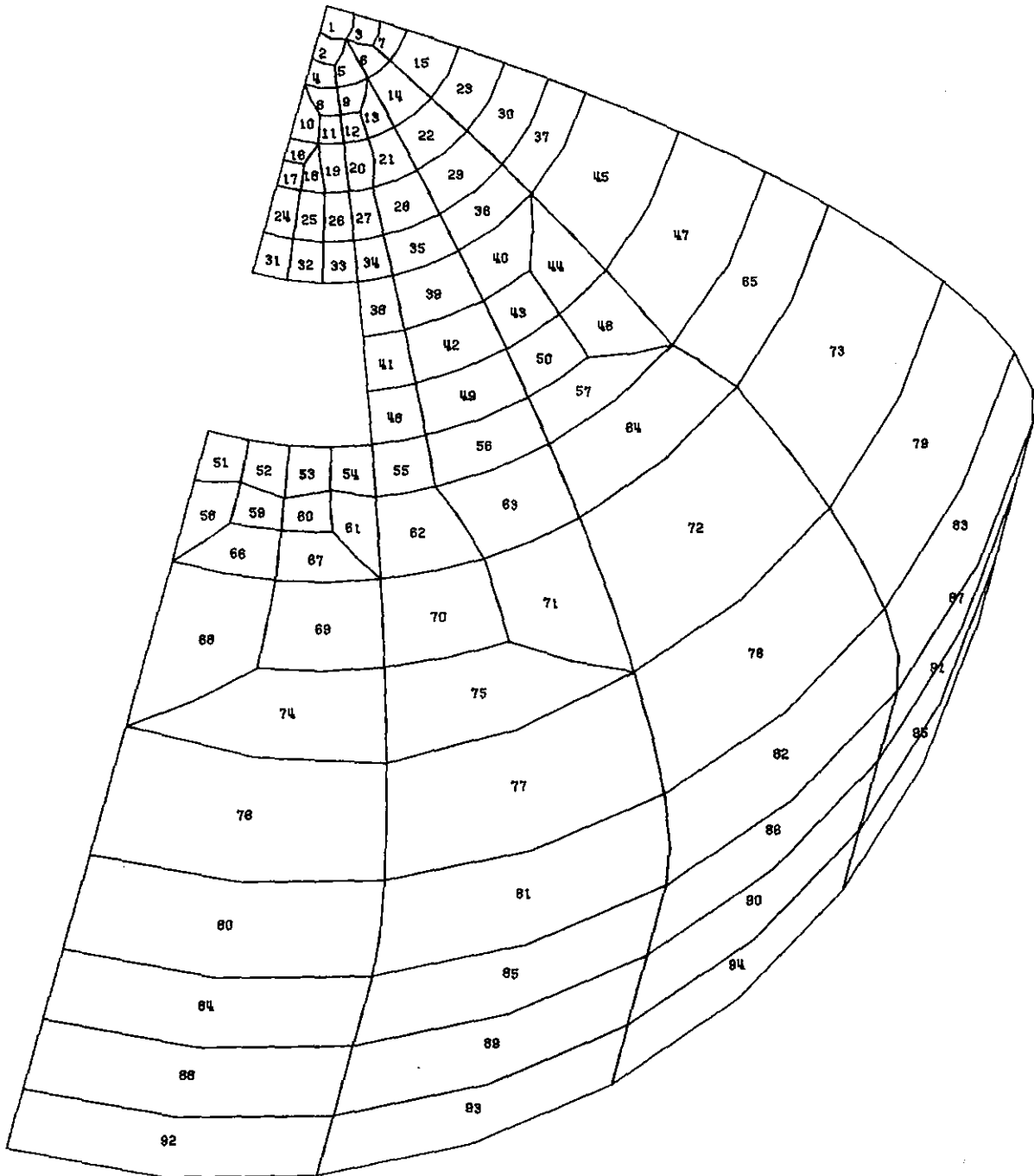


Figura VI.25 - Perspectiva

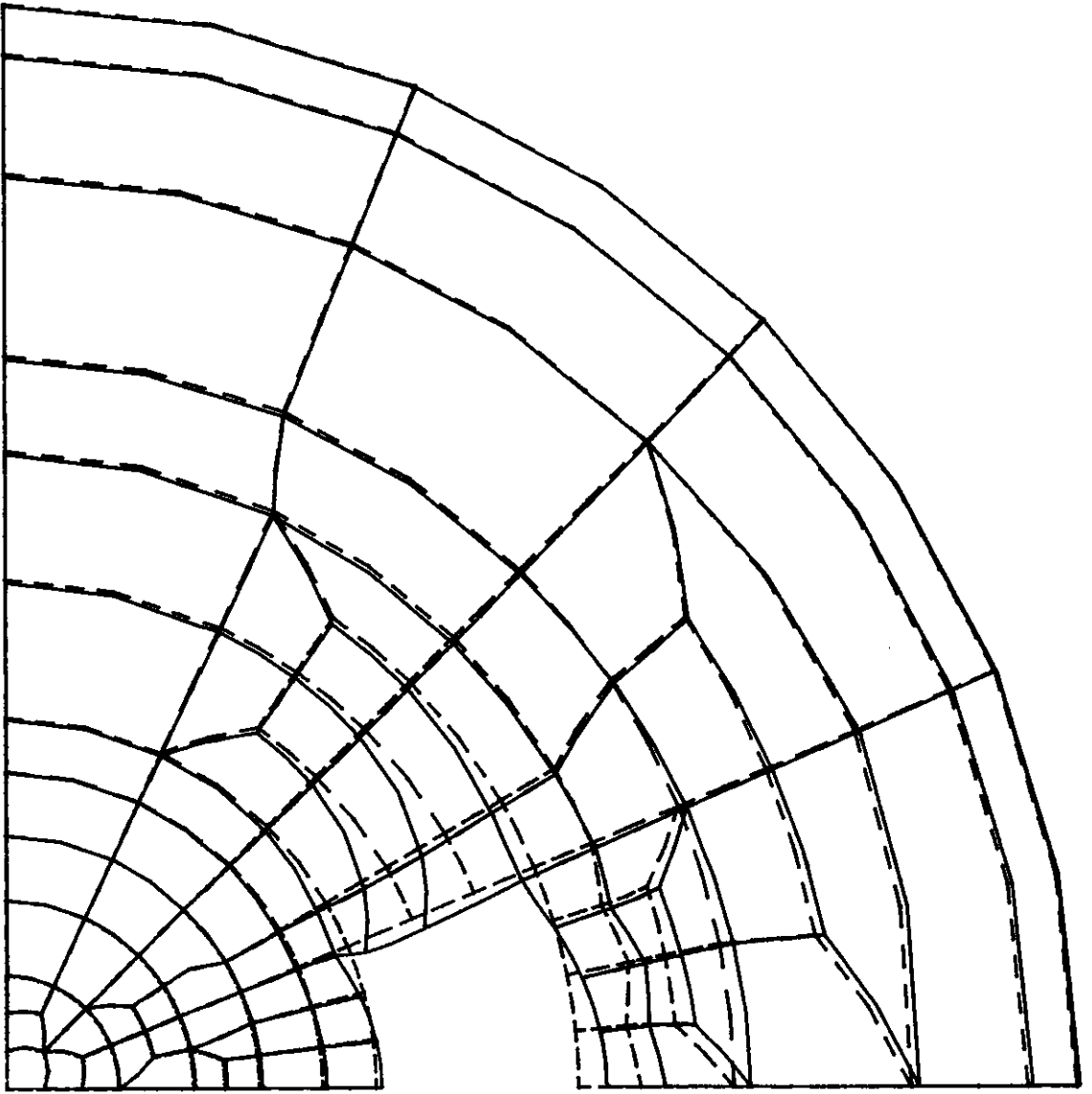


Figura VI.26 - Projeção XY da configuração deformada (em tracejado, a geometria inicial)

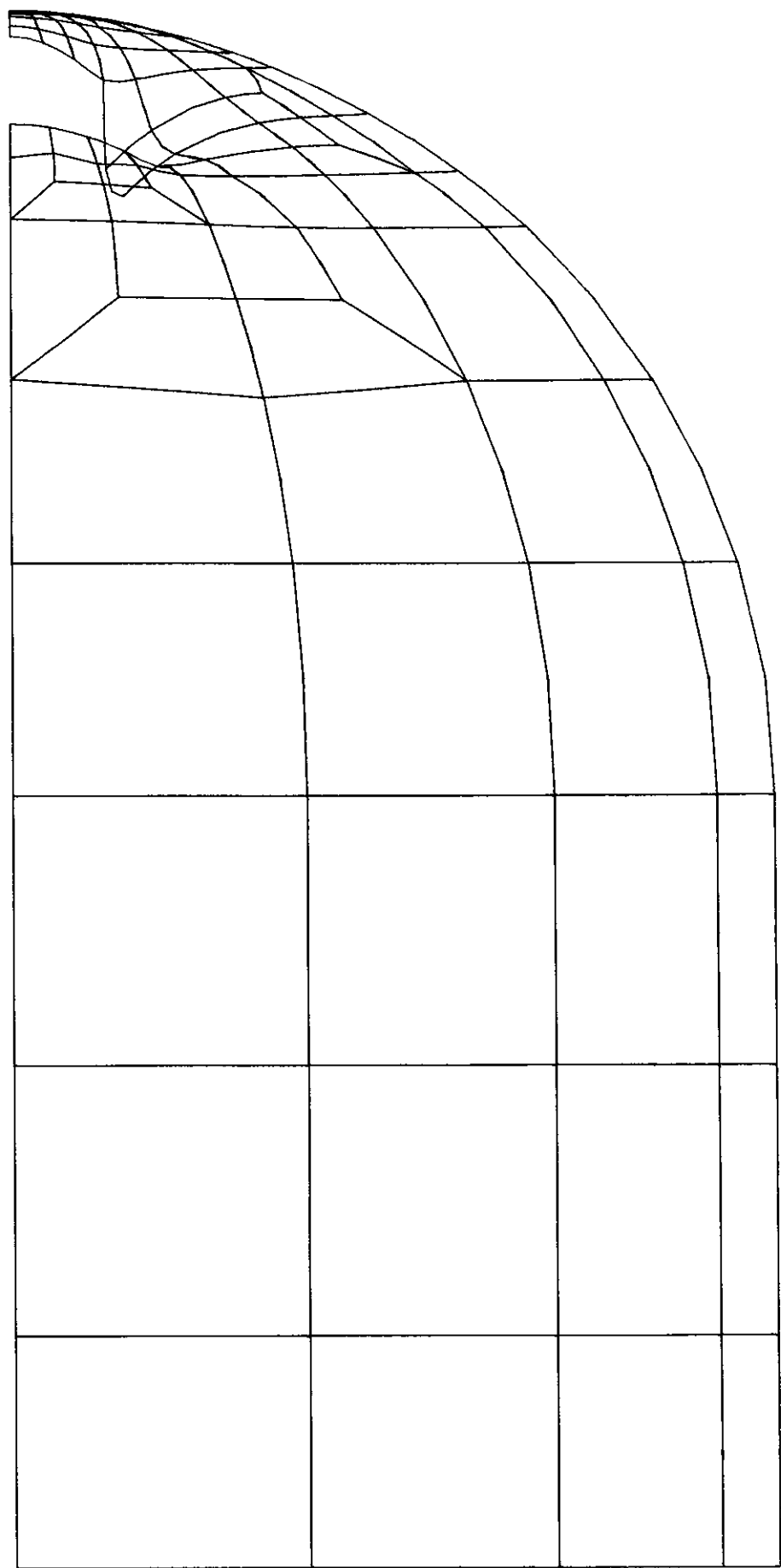
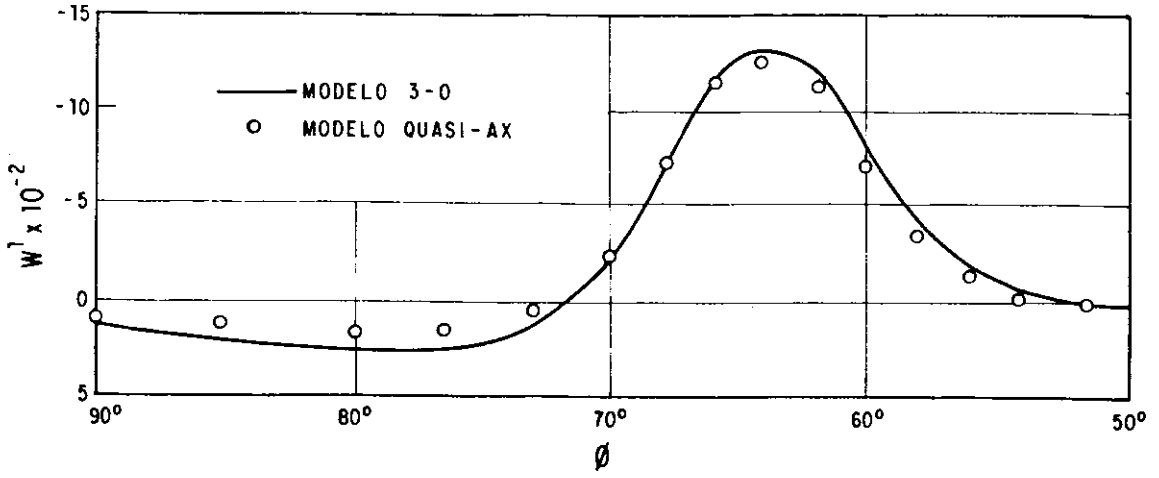
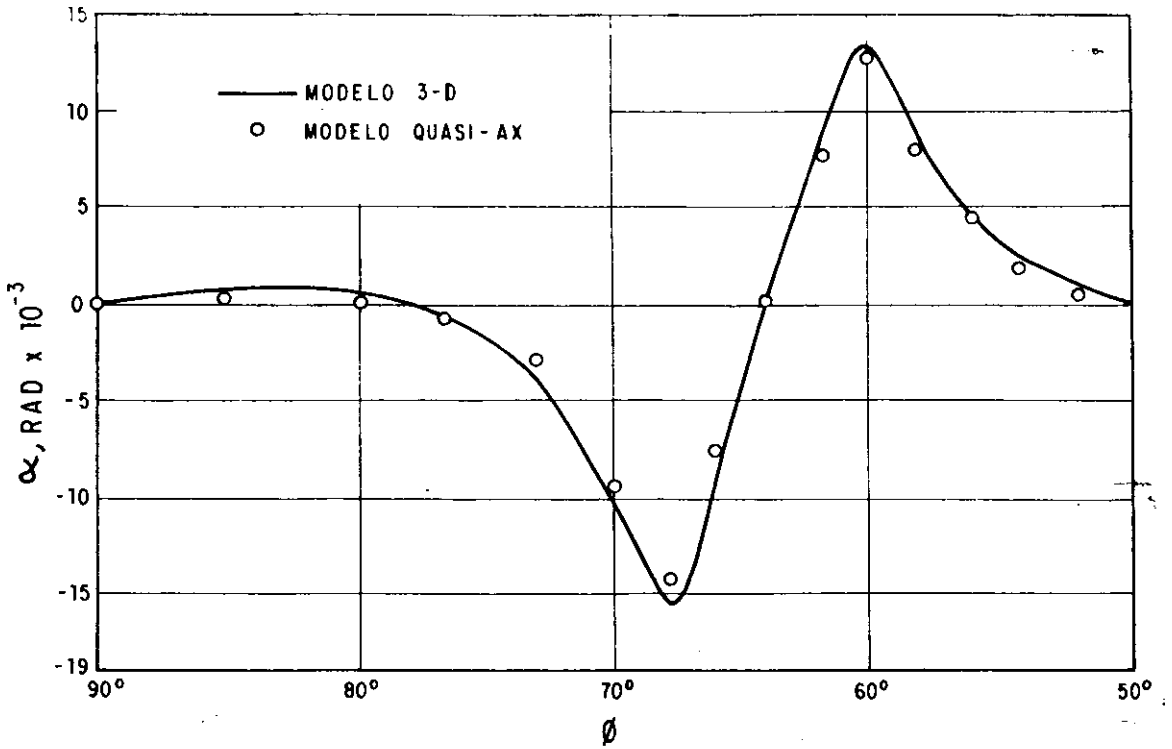


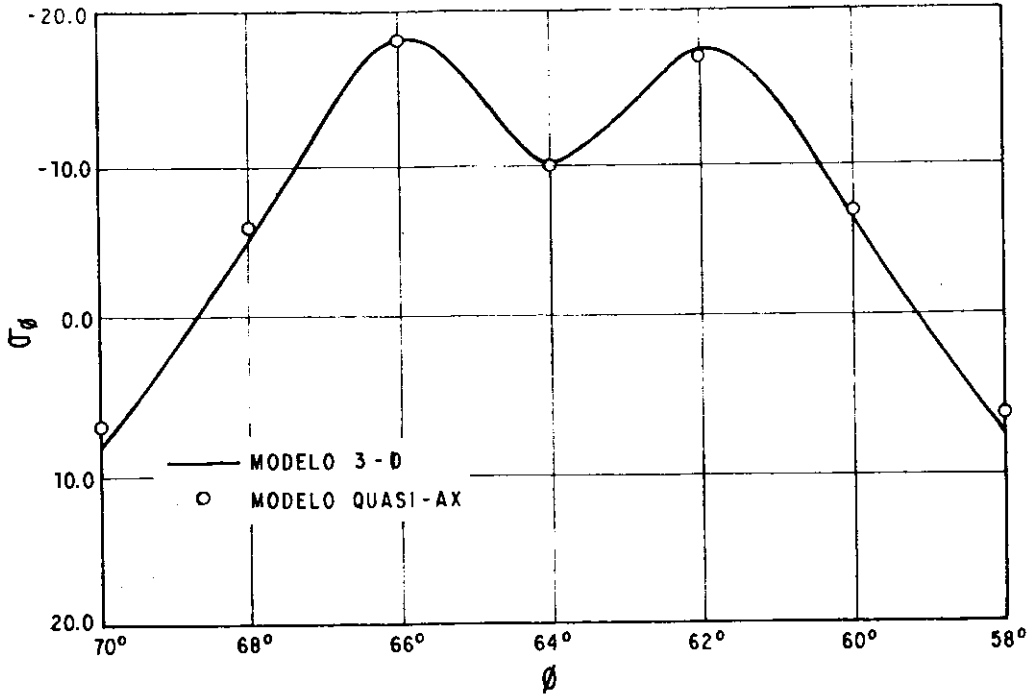
Figura VI.27 - Projeção YZ da configuração deformada



(a) Deslocamentos verticais ao longo da linha com $\theta = 22.5^\circ$



(b) Rotações em torno da direção circunferencial, ao longo da linha com $\theta = 22.5^\circ$



(c) Tensões meridionais na face superior, sobre a borda da abertura (aonde $\theta = 22.5^\circ$)

	3-D	Quasi-AX
Montagem	406	360
Resolução	787	567

(d) Tempos de processamento em segundos

Figura VI.28 - Resultados para o exemplo 8

pliados por um fator de escala para facilitar a visualização; a figura (VI.28) apresenta gráficos comparando deslocamentos, rotações e tensões obtidas pelos dois modelos.

O modelo quasi-axissimétrico proporcionou uma análise significativamente mais eficiente, mesmo apresentando mais graus de liberdade que o modelo tridimensional. Isto deve-se basicamente a dois fatores: a) menor tempo de geração das matrizes de rigidez dos elementos, já que, a grosso modo, substituíram-se 67 elementos gerais por 18 elementos axissimétricos; e b) menor tempo de resolução do sistema, mesmo com um maior número de equações, já que a matriz de rigidez global resultou muito mais compacta. Para o modelo quasi-axissimétrico o "solver" operou sobre 121405 coeficientes, enquanto que, para o modelo tridimensional, operam-se sobre 149480 coeficientes. Deve-se ressaltar que, na preparação deste exemplo e dos anteriores, buscou-se apenas verificar o comportamento do modelo quasi-axissimétrico; não houve a preocupação de escolher um caso em que a solução por este modelo fosse particularmente favorável em termos de economia computacional.

C A P Í T U L O V I ICONCLUSÕES

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Apresentou-se neste trabalho o desenvolvimento de um sistema computacional para análise estrutural pelo método dos elementos finitos. Este sistema está atualmente orientado para a análise de cascas, particularmente as cascas de revolução com irregularidades localizadas, já que dispõe de um elemento capaz de efetuar a transição entre os elementos de casca geral e axissimétrica; a implementação deste enfoque "quasi-axissimétrico" constituiu-se na principal motivação deste trabalho.

Procurou-se, com o desenvolvimento completo do sistema computacional, abranger e estudar diversos tópicos dentro do campo de aplicação de métodos numéricos à análise estrutural. Estes tópicos cobriram desde a formulação teórica dos elementos utilizados até as diversas técnicas computacionais necessárias para o desenvolvimento da programação, incluindo aqui as facilidades disponíveis para a geração do modelo estrutural, a sua resolução de forma eficiente, e a interpretação dos resultados. A formulação teórica e o desenvolvimento para a obtenção da matriz de rigidez dos elementos utilizados foram apresentados nos capítulos II e III. Nos capítulos IV e V apresentaram-se considerações sobre o sistema computacional desenvolvido, abordando as técnicas de montagem, armazenamento e solução do sistema de equações; a descrição da estrutura do programa; a descrição das facilidades de geração automática e entrada de dados em forma de linguagem orientada. No capítulo VI apresentaram-se alguns exemplos de utilização do sistema, aonde procurou-se verificar o comporta

mento dos elementos finitos disponíveis, e particularmente o comportamento do modelo quasi-axissimétrico. Neste capítulo apresentaram-se também exemplos de utilização dos recursos para representação gráfica do modelo estrutural e dos resultados da análise, que consistem em uma ferramenta de grande utilidade para a preparação e verificação da malha, e interpretação dos resultados.

Algumas conclusões podem ser obtidas a partir do que foi apresentado. A primeira delas é a verificação do comportamento dos elementos derivados da formulação isoparamétrica, que já há algum tempo provaram ser altamente eficientes e universais para a análise de cascas de geometria arbitrária. Estes elementos devem se impor naturalmente sobre outros, baseados em formulações mais simplificadas; comparando-os, por exemplo, com os elementos tipo casca poliédrica, verifica-se que os elementos isoparamétricos têm muito maior capacidade para representar corretamente as características físicas (já que são derivados da elasticidade tridimensional, e podem sofrer deformações devido ao esforço cortante) e geométricas (já que sua forma é definida por funções de interpolação parabólica, neste caso, e podem representar contornos e superfícies curvas), não só de cascas finas mas também de cascas moderadamente espessas.

Verificou-se também que o uso dos elementos de transição em um modelo quasi-axissimétrico pode ser altamente compensador, dependendo de vários fatores que podem influenciar seu desempenho. Dentre estes, o principal é, sem dúvida, a determinação dos limites das regiões axissimétricas e geral, ou, em outras palavras, até que ponto deve-se aproximar os elementos de transi

ção das irregularidades localizadas. Outro fator importante é o número e distribuição dos harmônicos de Fourier que devem ser considerados para representar os deslocamentos na região axissimétrica. Estes fatores são interdependentes, e implicam em um compromisso entre economia computacional e precisão dos resultados. Por exemplo, afastando-se os elementos de transição da região com irregularidades aumenta-se a região geral e consequentemente o número de elementos gerais utilizados, o que torna a solução mais precisa — e mais onerosa. Por outro lado, isto pode levar à utilização de um menor número de harmônicos na região axissimétrica, o que por sua vez irá reduzir o custo da solução. Fica como sugestão para trabalhos posteriores um estudo mais exaustivo destes fatores, de modo a estabelecer-se parâmetros para a utilização criteriosa do modelo proposto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FELIPPA, C.A. and GEERS, T.L. - "Constraint Techniques for Coupling of Discrete Axisymmetric and General Structures" - - 3rd International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology - SMiRT - Vol. 5, Part M, London, 1975.
2. PILKEY, W.D. and PARK, I.B. - "Shells of Revolution with Cut-Outs", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, pp. 2461-2465, November, 1979.
3. HAN, K.J. and GOULD, P.L. - "Line Node and Transitional Shell Element for Rotational Shells" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 18, pp. 879-895, 1982.
4. ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L. and TOO, J.M. - "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells" - International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
5. AHMAD, S., IRONS, B.M. and ZIENKIEWICZ, O.C., Curved Thick Shell and Membrane Elements with Particular Reference to Axisymmetric Problems", 2nd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
6. ZIENKIEWICZ, O.C. - The Finite Element Method in Engineering Science, 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.
7. EBECKEN, N.F.F. - Processo Semi-Analítico para a Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos - Tese de M.Sc. COPPE/UFRJ, 1973.

8. HALBRITTER, A.L. - Analysis de Cascaras Gruesas y Finas con Elementos Tridimensionales - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.
9. COOK, R.D. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, 1974.
10. VENANCIO Fº, F. - "Isoparametric Elements", Chapter 6 from The Finite Element Technique - Edited by Brebbia, C.A. and Ferrante, A.J. - Edições URGs, 1975.
11. CROSE, J.G. - "Bandwidth Minimization of Stiffness Matrices", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, February, 1971.
12. BATISTA, R.C. - Estruturas Tridimensionais com Propriedades Mecânicas dos Materiais Representadas por Séries - Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1974.
13. SORIANO, H.L. - "Resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares com Utilização de Memória Auxiliar de Computadores Digitais" - Notas de aula do Curso Técnicas Computacionais em Análise Estrutural, COPPE/UFRJ, 1980.
14. SORIANO, H.L. e PRATES, C.L.M. - "Armazenamento Computacional de Matrizes em Análise Estrutural" - Publicação PDD 14/78 - COPPE/UFRJ.
15. TAYLOR, R.L. - "Computer Procedures for Finite Element Analysis" - Capítulo 24 de "The Finite Element Method" - - Zienkiewicz, O.C., 3rd Edition, McGraw-Hill, 1977.

16. BATHE, K.J. and WILSON, E.L. - Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, 1976.
17. HINTON, E. and OWEN, D.R.J. - Finite Element Programming - Academic Press, 1977.
18. LIMA, E.C.P. - Lorane-Dina-Uma Linguagem Orientada para Análise Dinâmica de Estruturas - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
19. FERRANTE, A.J.; SANTOS, M.I.G.; CHAGAS Fº, E. e FRANCO, J. S.G. - A Linguagem Lorane Linear para Análise Estrutural por Computador - URGs, Porto Alegre, Setembro, 1977.
20. EBECKEN, N.F.F. - Lorane-NL-Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear - Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, 1977.
21. SORIANO, H.L. e COSTA, A.M. - "Sugestões quanto ao Desenvolvimento de Programações para Análise Estrutural em FORTRAN IV" - Publicação PDD 15/78, COPPE/UFRJ.
22. MSC/NASTRAN - "Application Manual", NASA, 1972.
23. FERRANTE, A.J. e CARVALHO, J.A.P. - Linguagem LEBRE I-A Para Análise de Estruturas - Manual do Sistema, Versão Preliminar. Publicação COPPETEC, 1980.
24. BUDIANSKY, B. and RADOWSKI, P.P. - "Numerical Analysis of Unsymmetrical Bending of Shells of Revolution" - AIAA Journal, Vol. 1, Nº 8, August, 1963.

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ T PARA O ELEMENTO DE CASCA AXISSIMÉTRICA

APÊNDICE A

DETERMINAÇÃO DA MATRIZ \underline{T} PARA O ELEMENTO DE
CASCA AXISSIMÉTRICA

\underline{T} é a matriz de transformação de coordenadas que define, para o elemento axissimétrico, o sistema de eixos locais nas direções meridional, circunferencial e normal. É dada por:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

\vec{v}_3 é um vetor unitário normal à superfície média, e não é definido diretamente a partir dos dados nodais. Para obter \vec{v}_3 , toma-se o produto de dois vetores tangentes à superfície média:

$$\vec{v}_3 = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (A.2.a)$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{v}_3}{||\vec{v}_3||} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (A.2.b)$$

\vec{v}_2 é o vetor unitário \vec{j} na direção circunferencial:

$$\vec{v}_2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

\vec{v}_1 é um vetor unitário na direção meridional, normal a \vec{v}_{3i} e \vec{v}_{2i} :

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2 = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4.a})$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{V}_1}{\|\vec{V}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.4.b})$$

Substituindo (A.2), (A.3) e (A.4) em (A.1) tem-se:

$$\vec{T} = \frac{1}{\|\vec{V}_3\|} \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial \xi} & 0 & -\frac{\partial z}{\partial \xi} \\ 0 & \|\vec{V}_3\| & 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial \xi} & 0 & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\|\vec{V}_3\| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES \tilde{J} , \tilde{J}^{-1} e T PARA OS
ELEMENTOS DE CASCA GERAL E DE TRANSIÇÃO

APÊNDICE B

DETERMINAÇÃO DAS MATRIZES \underline{J} , \underline{J}^{-1} e \underline{T} PARA OS
ELEMENTOS DE CASCA GERAL E DE TRANSIÇÃO

A matriz jacobiana \underline{J} relaciona as derivadas dos deslocamentos em coordenadas globais xyz às derivadas dos deslocamentos em coordenadas curvilíneas. É dada por

$$\underline{J} = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{array} \right\} \quad (\text{B.1})$$

A relação entre as coordenadas cartesianas xyz e as coordenadas cilíndricas globais r θ z é dada por

$$\left\{ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{array} \right\} \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.2) em (B.1) e operando, obtém-se a expressão para a matriz jacobiana:

$$\underline{J} = \left[\begin{array}{ccc} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} \frac{\partial r}{\partial \xi} \cdot \cos \theta & -r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \cdot \sin \theta & \frac{\partial r}{\partial \xi} \cdot \sin \theta + r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \cdot \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot \cos \theta & -r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \sin \theta & \frac{\partial r}{\partial \eta} \cdot \sin \theta + r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \cdot \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cdot \cos \theta & -r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \cdot \sin \theta & \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cdot \sin \theta + r \cdot \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \cdot \cos \theta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{array} \right] \quad (\text{B.3})$$

onde os rótulos J11, J12 são empregados para facilitar a notação. A inversa do jacobiano será:

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} IJ11 & IJ12 & IJ13 \\ IJ21 & IJ22 & IJ23 \\ IJ31 & IJ32 & IJ33 \end{bmatrix} \quad (B.4)$$

onde:

$$\begin{aligned} IJ11 &= (J22 \times J33 - J23 \times J32)/DJ \\ IJ21 &= (J23 \times J31 - J33 \times J21)/DJ \\ IJ31 &= (J21 \times J32 - J31 \times J22)/DJ \\ IJ12 &= (J32 \times J13 - J12 \times J33)/DJ \\ IJ22 &= (J33 \times J11 - J13 \times J31)/DJ \\ IJ32 &= (J31 \times J12 - J11 \times J32)/DJ \\ IJ13 &= (J12 \times J23 - J22 \times J13)/DJ \\ IJ23 &= (J13 \times J21 - J23 \times J11)/DJ \\ IJ33 &= (J11 \times J22 - J21 \times J12)/DJ \end{aligned} \quad (B.5)$$

e DJ é o determinante de \underline{J} .

A matriz de transformação de coordenadas \underline{T} que define o sistema cartesiano local $x' y' z'$ é obtida de maneira análoga ao descrito no Apêndice A. Tem-se:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{bmatrix} \quad (B.6)$$

onde \vec{v}_3 também é um vetor unitário normal à superfície média, determinado a partir do produto de dois vetores tangentes à superfície média

$$\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J11 \\ J12 \\ J13 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} J21 \\ J22 \\ J23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{13} \\ v_{23} \\ v_{33} \end{bmatrix} \quad (B.7)$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{V}_3}{\|\vec{V}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{V_{13}^2 + V_{23}^2 + V_{33}^2}} \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

onde:

$$\begin{aligned} V_{13} &= J_{23} \times J_{12} - J_{13} \times J_{22} \\ V_{23} &= J_{13} \times J_{21} - J_{23} \times J_{11} \\ V_{33} &= J_{22} \times J_{11} - J_{12} \times J_{21} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Aquí se utilizou a mesma notação de (B.3)

\vec{v}_2 é definido a partir do produto $\vec{k} \wedge \vec{V}_3$:

$$\vec{V}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_{23} \\ V_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{V}_2}{\|\vec{V}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{V_{13}^2 + V_{23}^2}} \begin{bmatrix} -V_{23} \\ V_{13} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

\vec{v}_1 é definido a partir do produto $\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$:

$$\vec{V}_1 = \begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \\ V_{33} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -V_{23} \\ V_{13} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{31}^2}} \begin{Bmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ v_{31} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

onde

$$\begin{aligned} v_{11} &= -v_{13} v_{33} \\ v_{21} &= -v_{23} v_{33} \\ v_{31} &= v_{13}^2 + v_{23}^2 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Substituindo (B.8), (B.11) e (B.13) em (B.6) obtem-se a matriz de transformação de coordenadas \underline{T} . Deve-se ressaltar que, agora, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 não coincidem, necessariamente, com as direções meridional e circunferencial da região axissimétrica da casca.

Observando a relação (B.11), verifica-se que não é possível obter aqui, ao contrário do caso do elemento de casca axissimétrica, um vetor unitário \vec{v}_2 independente das componentes de \vec{v}_3 . Assim, se \vec{v}_3 for paralelo a \vec{k} (ou seja, se $v_{13} = v_{23} = 0$), não se pode determinar um vetor unitário \vec{v}_2 a partir da relação (B.9). Neste caso pode-se fazer

$$\vec{v}_2 = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

$$\vec{v}_1 = \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

e \tilde{T} fica

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

No processo de integração numérica da matriz de rigidez, θ será a coordenada angular de um ponto de Gauss.

Aqui, \vec{v}_1 e \vec{v}_2 coincidem com as direções radial e circunferencial de uma placa.

APÊNDICE CDETERMINAÇÃO DAS MATRIZES \tilde{R} E \hat{R}

APÊNDICE CDETERMINAÇÃO DAS MATRIZES $\underline{\hat{R}}$ e $\underline{\hat{R}}$

No item (III.4) foram definidas as matrizes \underline{R} e $\underline{\hat{R}}$

$$\underline{R} = \left[\frac{\partial \underline{T}_8}{\partial \xi} \cdot \underline{\Theta}_8^j + \underline{T}_8 \cdot \frac{\partial \underline{\Theta}_8^j}{\partial \xi} \right] \quad (C.1)$$

$$\underline{\hat{R}} = \left[\frac{\partial \underline{\hat{T}}_8}{\partial \xi} \cdot \underline{\hat{\Theta}}_8^j + \underline{\hat{T}}_8 \cdot \frac{\partial \underline{\hat{\Theta}}_8^j}{\partial \xi} \right] \quad (C.2)$$

Observando as eqs. (c.1) e (c.2), verifica-se que são necessárias as expressões das derivadas das matrizes \underline{T}_8 , $\underline{\Theta}_8^j$, $\underline{\hat{T}}_8$ e $\underline{\hat{\Theta}}_8^j$ em relação a ξ .

C.1) Derivadas das matrizes $\underline{\Theta}_8^j$ e $\underline{\hat{\Theta}}_8^j$

A matriz $\underline{\Theta}_8^j$ de (C.1) é dada por

$$\underline{\Theta}_8^j = \begin{bmatrix} \cos j\theta_8 & 0 & 0 \\ 0 & \text{sen} j\theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & \cos j\theta_8 \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

onde

$$\theta_8 = \frac{1-\xi}{2} \theta_6 + \frac{1+\xi}{2} \theta_7 \quad (C.4)$$

Derivando (C.3), obtem-se

$$\frac{\partial \theta_8^j}{\partial \xi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cos j\theta_8)}{\partial \xi} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\sen j\theta_8)}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\cos j\theta_8)}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (C.5)$$

onde

$$\frac{\partial(\cos j\theta_8)}{\partial \xi} = \frac{\partial(\cos j\theta_8)}{\partial \theta_8} \frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} = -j \sen j\theta_8 \frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} \quad (C.6)$$

$$\frac{\partial(\sen j\theta_8)}{\partial \xi} = \frac{\partial(\sen j\theta_8)}{\partial \theta_8} \frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} = j \cos j\theta_8 \frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} \quad (C.7)$$

Derivando (C.4), tem-se

$$\frac{\partial \theta_8}{\partial \xi} = \frac{\theta_7 - \theta_6}{2} \quad (C.8)$$

Substituindo (C.8), (C.7) e (C.6) em (C.5) obtem-se a expressão final da derivada de θ_8^j em relação a ξ .

$$\frac{\partial \theta_8^j}{\partial \xi} = \frac{j(\theta_7 - \theta_6)}{2} \begin{bmatrix} -\sen j\theta_8 & 0 & 0 \\ 0 & \cos j\theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & -\sen j\theta_8 \end{bmatrix} \quad (C.9)$$

Procedendo analogamente

$$\frac{\partial \hat{\theta}_8^j}{\partial \xi} = \frac{j(\theta_7 - \theta_6)}{2} \begin{bmatrix} -\text{sen} j\theta_8 & 0 \\ 0 & \text{cos} j\theta_8 \end{bmatrix} \quad (\text{C.10})$$

C.2) Derivadas das Matrizes \underline{T}_8 e \underline{T}_8

Foi visto, no item (III.4), que as matrizes \underline{T}_i são compostas pelos vetores unitários \vec{v}_{1i} , \vec{v}_{2i} e \vec{v}_{3i} :

$$\underline{T}_i = \begin{bmatrix} \vec{v}_{1i} & \vec{v}_{2i} & \vec{v}_{3i} \end{bmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Os dados de entrada para o nó i definem o vetor \vec{v}_{3i} , através de suas componentes cilíndricas v_{3ri} , $v_{3\theta i}$ e v_{3zi} , ou de suas componentes cartesianas v_{3xi} , v_{3yi} e v_{3zi} . Para os sub-nós $i = 6, 8$ a situação é especial: como os sub-nós estão situados na região axissimétrica da casca, as componentes cilíndricas de seus vetores espessura serão idênticas, ou seja, $v_{3r6} = v_{3r7} = v_{3r8}$, etc. Assim, para todos os sub-nós que estiverem situados sobre um mesmo círculo nodal, só será necessário definir um vetor espessura como dado de entrada, do qual já se sabe de antemão que sua componente $v_{3\theta}$ vale zero.

No entanto, a matriz de transformação de coordenadas \underline{T}_i de (C.11) é definida a partir das componentes cartesianas do vetor espessura \vec{v}_{3i} . Estas componentes variam de um sub-nó para outro, e para o nó 8 (por exemplo) são dadas por:

$$\begin{aligned} V_{3x8} &= V_{3r} \cos \theta_8 \\ V_{3y8} &= V_{3r} \text{sen} \theta_8 \\ V_{3z8} &= V_{3z} \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Observa-se que se omitiu o índice i para a componente cilíndrica v_{3r} , já que esta componente não varia ao longo do círculo nodal.

A partir de (C.12) pode-se obter o vetor espessura unitário \vec{v}_{38}

$$\vec{v}_{38\ell} = \begin{bmatrix} V_{3x8} \\ V_{3y8} \\ V_{3z8} \end{bmatrix} = \frac{1}{t_\ell} \begin{bmatrix} V_{3r\ell} \times \cos\theta_8 \\ V_{3r\ell} \times \sin\theta_8 \\ V_{3z\ell} \end{bmatrix} \quad (C.13)$$

onde o índice ℓ indica agora o círculo nodal considerado, e t_ℓ é a sua espessura, dada por

$$t_\ell = \sqrt{V_{3r\ell}^2 + V_{3z\ell}^2} \quad (C.14)$$

Os demais vetores que compõem T_8 serão (vide as expressões (B.10), (B.12), (B.13) e (B.14) do Apêndice B):

$$\vec{v}_{28\ell} = \frac{1}{\sqrt{V_{3r\ell}^2 \cdot \cos^2\theta_8 + V_{3r\ell}^2 \cdot \sin^2\theta_8}} \begin{bmatrix} -V_{3r\ell} \cdot \sin\theta_8 \\ V_{3r\ell} \cdot \cos\theta_8 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_8 \\ \cos\theta_8 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (C.15)$$

$$\vec{v}_{18\ell} = \frac{1}{V_{3r\ell} \sqrt{V_{3r\ell}^2 + V_{3z\ell}^2}} \begin{bmatrix} -V_{3r\ell} \cdot V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 \\ V_{3r\ell} \cdot V_{3z\ell} \cdot \sin\theta_8 \\ V_{3r\ell}^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{t_\ell} \begin{bmatrix} -V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 \\ -V_{3z\ell} \cdot \sin\theta_8 \\ V_{3r\ell} \end{bmatrix} \quad (C.16)$$

Substituindo-se (C.13), (C.15) e (C.16) em (C.11) para $i = 8$ obtém-se

$$\underline{T}_8 = \frac{1}{t_\ell} \begin{bmatrix} -V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 & -t_\ell \cdot \sin\theta_8 & V_{3r\ell} \cdot \cos\theta_8 \\ -V_{3z\ell} \cdot \sin\theta_8 & t_\ell \cdot \cos\theta_8 & V_{3r\ell} \cdot \sin\theta_8 \\ V_{3r\ell} & 0 & V_{3z\ell} \end{bmatrix} \quad (C.17)$$

$$\frac{\partial \underline{T}_8}{\partial \xi} = \frac{1}{t_\ell} \begin{bmatrix} -V_{3z\ell} \cdot \frac{\partial \cos\theta_8}{\partial \xi} & -t_\ell \cdot \frac{\partial \sin\theta_8}{\partial \xi} & V_{3r\ell} \cdot \frac{\partial \cos\theta_8}{\partial \xi} \\ -V_{3z\ell} \cdot \frac{\partial \sin\theta_8}{\partial \xi} & t_\ell \cdot \frac{\partial \cos\theta_8}{\partial \xi} & V_{3r\ell} \cdot \frac{\partial \sin\theta_8}{\partial \xi} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.18)$$

Aproveitando-se as expressões (C.6), (C.7) para $J=1$ e (C.8), e substituindo-as em (C.18) obtém-se

$$\frac{\partial \underline{T}_8}{\partial \xi} = \frac{\theta_7 - \theta_6}{2} \frac{1}{t_\ell} \begin{bmatrix} V_{3z\ell} \cdot \sin\theta_8 & -t_\ell \cdot \cos\theta_8 & -V_{3r\ell} \cdot \sin\theta_8 \\ -V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 & -t_\ell \cdot \sin\theta_8 & V_{3r\ell} \cdot \cos\theta_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (C.19)$$

Para se obter $\frac{\partial \hat{\underline{T}}_8}{\partial \xi}$ basta eliminar a terceira coluna da matriz de (C.19).

C.3) Matrizes \underline{R} e $\hat{\underline{R}}$

Substituindo as expressões (C.3), (C.9), (C.7) e (C.19) em (C.1):

$$\begin{aligned}
 \tilde{R} &= \frac{\theta_7 - \theta_6}{2} \frac{1}{t_\ell} \left[\begin{array}{c|c|c} V_{3z\ell} \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 & -t_\ell \cdot \cos\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 & -V_{3r\ell} \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 \\ \hline -V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 & -t_\ell \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 & V_{3r\ell} \cdot \cos\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \\
 &+ j \left[\begin{array}{c|c|c} V_{3z\ell} \cdot \cos\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 & -t_\ell \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 & -V_{3r\ell} \cdot \cos\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 \\ \hline V_{3z\ell} \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 & t_\ell \cdot \cos\theta_8 \cdot \cos j\theta_8 & -V_{3r\ell} \cdot \text{sen}\theta_8 \cdot \text{sen} j\theta_8 \\ \hline -V_{3r\ell} \cdot \text{sen} j\theta_8 & 0 & -V_{3z\ell} \cdot \text{sen} j\theta_8 \end{array} \right] \quad (C.20)
 \end{aligned}$$

Para obter-se $\hat{\tilde{R}}$ basta eliminar a terceira coluna de cada parcela que compõe \tilde{R} em (C.20).

APÊNDICE D

EXEMPLOS DE UTILIZAÇÃO DA LINGUAGEM DO SISTEMA

```

***** ## VI-2 ## EXEMPLO 1 *****
NUMERO DE NOS      19 ELEMENTOS 9
NUMERO DE CONDICÕES 1 CARREGAMENTOS 1
CONSTANTES
E 10000000, POISSON .33
DADOS ESFERICOS
  1 ATE 19 R 100, V 1.
    1 PHI 0, FI 0, C 5 PHI 40, FI 40, C INTER 9 PHI 50, FI 50, C INTER
      11 PHI 54, FI 54, C INTER 15 PHI 58, FI 58, C INTER
      19 PHI 60, FI 60, C INTER
INCIDENCIA DOS ELEMENTOS
1 1 2 3 1 GERA 8 ELEMENTOS
CONDICOES DE CONTORNO
  1 11111
FIM DADOS ESTRUTURAIS
CARREGAMENTO 1
CIRCULOS NODAIS CARREGADOS
19 0, 0, 0, 1, 0,
ANALISE

```


***** ## VI=4 ## EXEMPLO 3 = 4 X 4 *****

GPIOT CALTEN TENLOC TENGLO

NUMERO DE NOS 65 ELEMENTOS 16

NUMERO DE CONDICÕES DE CONTOURNO 25 CARREGAMENTOS 1

CONSTANTES

E 10500000. POISSON 0.3125

DADOS NODAIS

1 ATE 65 R 5. VR .094

1 Z 5.175

9 Z 5.175 T 90. INTER

10 Z 4.528125

14 Z 4.528125 T 90. INTER

1 ATE 9 GERA Z MAIS -1.29375 15 ATE 23 29 ATE 37 43 ATE 51 57 ATE 65

10 ATE 14 GERA Z MAIS -1.29375 24 ATE 28 38 ATE 42 52 ATE 56

INCIDENCIA DOS ELEMENTOS

1 11 3 2 1 10 15 16 17 1 GERA 3 ELEMENTOS

1 ATE 4 GERAM 3 FILAS

CONDICÕES DE CONTOURNO

1 1111

2 ATE 8 110

9 10111

10 1001 15 24 29 38 43 52 57

14 10001 23 28 37 42 51 56 65

FIM DADOS ESTRUTURAIS

CARREGAMENTO 1

PONTOS NODAIS CARREGADOS

1 -25. 0. 0. 0. 0.

ANALISE

***** VI-9 ## EXEMPLO 8 - MODELO QUASI/AX *****

CALTEN TENLOC TENGLD

NUMERO DE NOS 134 SUBNOS 20 ELEMENTOS 51 TRANSICAO 18

%

NUMERO DE CONDICAOES 13 CARREGAMENTOS 1 HARMONICOS 13 ANGULOS 2

%

SIMA 4

CONSTANTES

E 10500. POISS .3125

%

DADOS ESFERICOS

%

1 ATE 126 R 100. VR 1.

%

1 PHI 89.9999 FI 89.9999 C

%

2 PHI 89. FI 89. C

11 PHI 80. FI 80. C INTER

%

12 PHI 79.2 FI 79.2 C

13 PHI 78.375 FI 78.375 C 15 PHI 76.5 FI 76.5 C INTER

%

16 PHI 74.75 FI 74.75 C 17 PHI 73. FI 73. C

%

18 PHI 71.5 22 PHI 71.5 T 30. INTER

23 PHI 71.5 T 45. 26 PHI 71.5 T 90. INTER

%

27 ATE 43 PHI 70.

27 T 0. 35 T 30. INTER ; 36 T 37.5 43 T 90. INTER

%

44 ATE 47 PHI 68.

44 T 22.5 45 T 30. 46 T 45. 47 T 56.25

%

48 ATE 57 PHI 66.

33 ATE 37 GERA PHI MAIS -4. 48 ATE 52

52 T 45. 54 T 52.5 INTER 55 T 60. 57 T 90. INTER

%

58 ATE 61 PHI 64.

44 ATE 46 GERA PHI MAIS -4. 58 ATE 60 61 T 52.5

%

62 ATE 74 PHI 62.

48 ATE 54 GERA PHI MAIS -4. 62 ATE 68 69 T 56.25

39 ATE 43 GERA PHI MAIS -8. 70 ATE 74

%

75 ATE 81 PHI 60.

58 ATE 61 GERA PHI MAIS -4. 75 ATE 78

55 ATE 57 GERA PHI MAIS -6. 79 ATE 81

%

82 ATE 102 PHI 58.

82 T 0. 90 T 22.5 INTER

62 ATE 74 GERA PHI MAIS -4. 90 ATE 102

%

103 ATE 113 PHI 56.

103 T 0. 107 T 22.5 INTER 108 T 30. 109 T 45. 110 T 52.5

111 T 60. 113 T 90. INTER

%

114 PHI 54. FI 54. C 115 PHI 52.75 FI 52.75 C

116 PHI 51.5 FI 51.5 C 117 PHI 49.5 FI 49.5 C

118 PHI 47.5 FI 47.5 C 119 PHI 43.75 FI 43.75 C 120 PHI 40. FI 40. C

121 PHI 36.25 FI 36.25 C 122 PHI 32.5 FI 32.5 C 123 PHI 25. FI 25. C

124 PHI 17.5 FI 17.5 C 125 PHI 8.75 FI 8.75 C 126 PHI 0. C

%

DADOS

X
127 ATE 134 R 100. V 1. 0

X
127 Z -12,5 C 128 Z -25. C 129 Z -42,5 C 130 Z -60. C 131 Z -72,5 C
132 Z -85. C 133 Z -92,5 C 134 Z -100. C

X
COORDENADA T DOS SUBNOS

X
1 0. 5 30. 9 90.

X
10 0. 14 22,5 15 30. 16 45. 17 52,5 18 60. 20 90.

X
INCIDENCIA DOS ELEMENTOS

X
1 3 2 1
1 GERA 7 ELEMENTOS

X
9 18 27 28 29 19 17
9 GERA 7 ELEMENTOS

X
17 45 35 34 33 44 48 49 50
17 GERA 2 ELEMENTOS

X
20 59 50 49 48 58 62 63 64
20 GERA 2 ELEMENTOS

X
23 55 39 47 54 61 68 69 70
23 GERA 1 ELEMENTO

X
24 56 41 40 39 55 70 71 72
24 GERA 1 ELEMENTO

X
26 76 64 63 62 75 90 91 92
26 GERA 5 ELEMENTOS

X
32 104 84 83 82 103 114
32 GERA 9 ELEMENTOS

X
42 116 115 114
42 GERA 9 ELEMENTOS

X
INCIDENCIA DAS LINHAS NODAIS

X
1 1 2 1 GERA 7

X
9 11 10 9 GERA 9

X
CONDICOES

X
1 11011

X
18 1001 27 82 103

X
26 10001 43 57 74 81 102 113

X
134 11111

X
COEFICIENTES

X
0 2 4 6 8 10 12

X
ANGULOS

X
0. 22,5

FIM DADOS ESTRUTURAIS

CARREGAMENTO 1

PONTOS NODAIS

48 0. 0. -5. 0. 0.

62 0. 0. -5. 0. 0.

ANALISE